

ANNALES

DE

CHIMIE ET DE PHYSIQUE,

Par MM. GAY-LUSSAC et ARAGO.

TOME TRENTE-HUITIÈME.



A PARIS,

Chez CROCHARD, Libraire, cloître Saint-Benoît, n° 16
près la rue des Mathurins.

1828.

EXAMEN des Principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.

Par Mademoiselle SOPHIE GERMAIN.

Je me suis appliquée depuis long-temps à me former une notion générale et précise sur la nature des forces d'élasticité; mais jusqu'ici, dans ce que j'ai publié, je ne suis pas sortie des bornes du sujet offert autrefois au concours. Ce sujet, quoiqu'il présente à lui seul des difficultés qui n'ont pas encore été complètement surmontées, est pourtant très-circonscrit.

Dans *mes Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques*, 1826, on a pu voir comment des suppositions particulières sur la direction du mouvement imprimé à un solide élastique, d'une épaisseur fort petite comparativement à ses autres dimensions, permet de considérer ce solide comme partagé en un nombre infini de couches infiniment minces, qui affecteraient toutes, durant le mouvement, des figures semblables entre elles et également semblables aux figures que les diverses couches réellement séparées prendraient si, toutes choses égales d'ailleurs, elles étaient ébranlées isolément.

De grandes simplifications résultent de cette manière de particulariser la question; et il suffit, dans le cas qu'elle caractérise, d'avoir l'expression des forces qui tendent à ramener à sa courbure primitive ou naturelle, la surface élastique dont une cause extérieure aurait changé la figure.

C'est sous ce unique point de vue que j'ai examiné (*Recherches sur la Théorie des surfaces élastiques*, 1821) l'hypothèse des forces répulsives. J'ai objecté que l'admission de telles forces empêcherait d'expliquer et la formation des lignes de limites analytiques loin des lignes de contour des surfaces, et l'équivalence entre les molécules douées de forces répulsives et celles qui sont privées de ce genre de forces, équivalence que j'ai prouvée par l'expérience. Seulement, après avoir rapporté le passage suivant, qui exprime la pensée de l'auteur dont je combattais l'hypothèse : « Or, quelle que soit la cause de cette qualité de la matière (l'élasticité), elle consiste en une tendance des corps à se repousser mutuellement.... », j'ai cru pouvoir ajouter que la qualité de la matière dont il s'agit dans ce passage me semblait être plutôt l'expansibilité que l'élasticité telle que nous l'observons dans les corps solides.

A cette époque, le sujet que je traitais était encore nouveau ; et je devais d'autant plus craindre de m'appesantir sur les notions générales qui constituent la métaphysique spéciale de la question, que les esprits m'avaient semblé peu disposés à accueillir cet ordre d'idées. Je voyais s'établir une opposition redoutable, surtout en ce qu'au lieu de procéder par la discussion, elle se réfugiait dans le dédain des généralités que j'ai toujours regardées comme incontestables.

Aujourd'hui les choses doivent avoir changé de face. Plusieurs auteurs s'occupent de ce genre de recherches. Ils peuvent, à la vérité, s'être formé des idées qui ne s'accorderaient pas avec les miennes ; mais ils ont dû sentir le besoin d'éclairer la théorie par l'examen de

principes qui lui servent de bases. J'ai donc lieu d'espérer que, si les notions qui vont être exposées leur paraissent mal fondées, ils penseront du moins que celles qu'ils leur substitueront doivent être assujetties à la double condition de la spécialité et de la généralité qui appartient incontestablement aux principes qu'ils auront rejetés.

Qu'il me soit permis de rappeler d'abord que l'objet des mathématiques n'est pas la recherche des causes qu'on peut assigner aux phénomènes naturels. Cette science perdrait et son caractère et son crédit, si, renonçant à l'appui que lui offrent les faits généraux bien constatés, elle cherchait dans la région nébuleuse des conjectures les moyens de satisfaire au besoin d'explication qui a été, dans tous les temps, une source féconde d'erreurs. Dans la question des forces d'élasticité, le fait général, spécial et caractéristique est la tendance que les corps doués de telles forces ont à se rétablir dans la forme qu'une cause extérieure peut leur avoir fait perdre. Cette tendance exige que toutes les molécules du corps élastique tendent aussi à reprendre la place qu'elles occupaient avant l'action d'une cause extérieure qui les aurait déplacées.

Tel est le fait, le seul fait incontestable de l'élasticité; et si, pour se faire une idée de la manière dont ce fait se réalise, on veut remonter plus haut, on devra craindre d'avoir introduit dans la question des considérations qui lui soient ou inutiles ou même entièrement étrangères.

Par exemple, avec l'hypothèse des seules forces répulsives, on aurait encore à chercher comment la

distance précise, qui séparerait les molécules du corps élastique avant l'action extérieure par laquelle cette distance a été changée, est devenue la limite de l'action des forces répulsives qui agissent entre les molécules du même solide.

Mais que, sans se contenter de la seule répulsion, on ait recours à l'action simultanée de forces attractives et répulsives qui s'exerceraient à de petites distances entre les molécules des corps solides élastiques, la question se complique et perd toute spécialité.

On est alors porté à distinguer trois cas, selon qu'en raison de la diminution de la distance entre les molécules, l'augmentation de la force attractive serait plus grande que celle de la force répulsive, lui serait égale, ou serait plus petite.

Dans le premier cas, si, pour fixer les idées, on attribue le changement de figure du corps élastique au choc d'un autre corps solide, et qu'on examine ce qui arriverait à l'instant où le corps choquant aurait cessé de toucher le corps choqué, on trouve que le changement de figure devra augmenter dans le sens où il a été d'abord produit.

Dans le second, il s'établira un nouvel équilibre, et le corps choqué conservera éternellement la forme qui lui aura été imprimée.

Le troisième cas est le seul qui laisse concevoir le retour du corps choqué à sa forme primitive; mais on est forcé de revenir au fait de la tendance des molécules à se rétablir dans la position dont une cause étrangère a pu les déranger: et c'est uniquement sur la connais-

sance de cette tendance qu'est appuyé le choix qu'on est obligé de faire.

Nous venons de voir que l'hypothèse des forces attractives et répulsives resterait vague et indéterminée si elle n'était modifiée par la considération du fait unique et caractéristique de l'élasticité : il nous reste à montrer comment cette hypothèse introduit dans la question des restrictions contraires à son essence.

Supposons donc, pour un instant, que les forces qui tendent à ramener les molécules du corps élastique dans leur position initiale, soient dues à des attractions et répulsions qui s'exerceraient à de petites distances ; nous serons conduits à regarder le changement de distance entre les molécules voisines comme le seul fait que l'excès des forces répulsives tende à détruire. Ainsi nous dirons que l'effet de ces forces se borne à replacer les molécules du corps solide élastique à la distance respective où elles étaient primitivement.

Mais si, au lieu de substituer à la notion claire et précise du fait de l'élasticité, la manière arbitraire dont il nous a plu d'envisager ce fait, nous nous fussions bornés à reconnaître ce même fait sans nous mettre en peine de l'expliquer, nous aurions vu que, l'effet des forces d'élasticité étant de ramener chacune des molécules du corps élastique à sa position naturelle, le rétablissement des distances primitives entre ces molécules ne représente qu'une partie du phénomène, et ne saurait par conséquent en fournir la mesure complète.

La méprise que nous signalons semblera sans doute tant plus frappante que la question des plaques élastiques vibrantes, la première de ce genre dont on se soit

occupé, présente un exemple de mouvement dans lequel on peut négliger les changemens de distances entre les molécules du corps solide élastique, pour considérer uniquement le déplacement commun à toutes celles de ces molécules qui se meuvent dans une direction perpendiculaire au plan de la plaque.

Dans le cas général du mouvement des solides élastiques, il y a à la fois changement de distance entre les molécules voisines et déplacement commun aux mêmes molécules. Il est même évident que la première partie du phénomène, bornée à des différences fort petites, ne suffirait pas pour expliquer le changement de forme du corps élastique. On se rendra compte du fait entier, en admettant que les molécules qui ont subi une action extérieure ont été poussées dans une direction qui leur est commune, mais que, cédant inégalement à cette impulsion, elles n'ont pu conserver les distances respectives qui les séparaient dans leur état naturel.

Nous concluons des observations précédentes, qu'il faudrait s'attacher d'abord à reconnaître et à exprimer le déplacement des molécules élastiques, en mesurant les espaces parcourus par rapport à des points fixes.

La seule difficulté est de trouver dans chaque cas l'expression des changemens de position qu'ont subis ces molécules. La nature de la question déterminera suffisamment la marche à suivre pour arriver à l'équation de cette classe de solides.

On sait en effet que les forces d'élasticité sont employées à détruire le changement qui a fourni leur mesure. Pour obtenir les équations du mouvement de corps solides élastiques, on devra donc multiplier l'ex

pression des forces d'élasticité par la variation de cette même expression, prise avec le signe —. Les procédés ordinaires du calcul feront ensuite connaître les termes qui seront définitivement multipliés par les variations de chacune des coordonnées x , y et z .

Si j'ai réussi à expliquer clairement quel est le fait de l'élasticité, la méthode que j'indique n'a pas besoin d'être justifiée; j'ajouterai pourtant qu'elle a en sa faveur l'autorité du succès. C'est en la pratiquant que M. de La Grange a calculé, d'après mon hypothèse, l'équation des plaques vibrantes qui fut alors donnée pour la première fois; et c'est seulement quelques années plus tard que plusieurs auteurs ont cherché à lier cette équation à une théorie différente (1).

(1) Quand il se présente une question nouvelle, il est toujours extrêmement difficile d'accréditer un principe qui lui soit spécial. Ici cependant je crois avoir offert les conclusions d'un raisonnement tellement simple qu'il ne prête guères à la contestation. Ainsi, lorsque je dis qu'une force est proportionnelle à l'effet qu'elle produit ou qu'elle tend à produire, fais-je autre chose que d'exprimer une proposition généralement admise, et qui d'ailleurs est évidente d'elle-même? Si j'ajoute que l'effet des forces d'élasticité tend à ramener les molécules du solide élastique à la position qu'elles occupaient avant qu'une cause extérieure les en ait dérangées, m'écartai-je de l'exact énoncé d'un fait certain? Enfin, si je conclus de là que l'expression du déplacement des molécules du corps élastique, déplacement sans lequel il n'y aurait pas lieu à l'action des forces d'élasticité, doit fournir la mesure de ce genre de force, n'ai-je pas été conduite à une conclusion inévitable? Les hypothèses qui conviennent aux simples lames et aux surfaces élastiques sont la traduction analytique de cette conclusion; et la démonstration de Bernouilli en est la construction. Cette démonstration a d'abord été donnée par rapport au seul cas linéaire; il m'a été ensuite facile, dans mes *Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*, de l'appliquer à celui des surfaces.

Mais, soit qu'on ait considéré une seule partie des changemens survenus dans la position des points qui appartiennent au solide, soit qu'on ait réussi à exprimer le fait complet du déplacement des molécules élastiques, on aurait agi d'une manière étrangère à la question si on avait cru pouvoir décomposer *immédiatement* l'expression de la force suivant la direction des axes coordonnés. Par un tel procédé, on devrait arriver aux équations qui conviennent à de simples forces de tension, à moins, toutefois, qu'on n'eût admis en même temps quelques suppositions contraires à la nature de ces dernières forces; et alors, il serait difficile de dire à quel genre de forces les formules qui seraient le fruit de l'opération pourraient être appliquées.

En ayant recours à la décomposition immédiate de la force, on aurait opéré comme s'il se fût agi de forces extérieures appliquées aux différens points d'une enveloppe circulaire, dont un premier point convenu eût été le centre; et ces forces se seraient trouvées réduites à trois, qui auraient exercé leur action dans des axes coordonnés. On aurait donc alors de véritables forces de tension dirigées suivant les mêmes axes. Mais on n'arriverait pas aux formules qui expriment des forces de tension, si on avait adjoint aux suppositions principales d'autres suppositions qu'on ne saurait admettre à l'égard de ces forces.

Une supposition de ce genre serait, par exemple, d'avoir regardé l'accroissement de chacune des coordonnées comme fonction de celle de ces coordonnées à laquelle l'accroissement appartient. Pour voir que cette supposition écarterait l'idée de la tension, il suffit de remarquer que la force qui serait employée à tendre

une corde extensible allongerait cette corde d'une manière uniforme dans toutes ses parties.

En renonçant à cette supposition, les procédés que nous avons examinés conduiraient, ce me semble, à l'expression connue des forces de tension.

Nous venons de montrer comment les notions hypothétiques ne définissent pas la question, mais la dénaturent. Ne nous en étonnons pas; la langue des calculs ne saurait ajouter à la certitude des idées qui lui sont confiées. S'il est dans la destinée des vues conjecturales de présenter sans cesse de nouveaux aspects, on peut encore dire que leur existence précaire et fugitive semble contraster avec l'appareil imposant des formules analytiques; tandis qu'au contraire la vérité inaltérable d'un fait bien constaté est en harmonie avec le caractère des sciences mathématiques.

SUR la Préparation de l'Acide titanique.

PAR M. HENRI ROSE.

Si l'on veut préparer de l'acide titanique pur avec le fer titané, que l'on peut se procurer facilement en beaucoup plus grande quantité que le ruthile, on peut s'y prendre de la manière suivante : Après avoir pulvérisé et lavé le fer titané, on l'expose à une température très-élevée, dans un tube de porcelaine traversé par un courant d'acide hydro-sulfurique sec. L'oxide de fer sera réduit et changé en sulfure, tandis que l'acide titanique n'aura éprouvé aucun changement. Après le refroidissement, on fait digérer le produit avec de l'acide hydro-