22.

Note sur la manière dont se composent les valeurs de y et z dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, et celles de Y' et Z' dans l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$.

(Par Mlle *Sophie Germain* à Paris.)

Mr. Legendre a remarqué (Théorie des nombres, 1830, T. 2. No. 512.) que dans l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, due à Mr. Gauſs, les coëfficiens des diverses puissances de x dont se compose la valeur $\partial' y$ sont congrus (mod. p) aux coëfficiens des mêmes puissances, dans le développement de $2(k-1)^{\frac{p-1}{2}}$.

Cette remarque peut servir à établir d'abord, que y est fonction homogène de x et -1.

Il en résulte que pour les nombres $4k+3$, les termes dont le développement de $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ est composé étant en nombre pair, puisque $\frac{p+1}{2}=2k+2$ représente ce nombre, ceux des termes qui comparés deux à deux ont des coëfficiens égaux, seront tant dans $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$, que dans la valeur $\partial' y$, affectés de signes différens.

Le contraire a lieu par rapport aux nombres de la forme $4k+1$ car, le nombre des termes dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ étant exprimé par $2k+1$, il est évident que ceux de ces termes qui, comparés deux à deux, offriront des coëfficiens égaux, seront affectés du même signe.

Il m'a paru qu'on pourroit se servir de la formule $2(x-1)^{\frac{p-1}{2}}$ pour déterminer, d'une manière générale, à l'égard de chacune des formes du nombre p, quels sont les coëfficiens des différentes puissances de x dont se composent les valeurs de y et de z. A la vérité, passé les premiers

de ces termes, les calculs deviendroient très compliqués; mais à l'égard de ceux-ci, on trouve facilement les valeurs suivantes, que je crois exactes et qui se verifient dans tous les cas que Mr. Gauſs a calculés directement.

Lorsque p est de la forme $8k+1$,

$$y = 2x^{4k}+x^{4k-1}+(2k+1)x^{4k-2}+(3k+1)x^{4k-3}\pm \text{ etc.}$$
$$z = x^{4k-1}+x^{4k-2};$$

p étant de la forme $8k+5$,

$$y = 2x^{4k+2}+x^{4k+1}+(2k+2)x^{4k}-kx^{4k-1}\pm \text{ etc.}$$
$$z = x^{4k+1}+0.x^{4k}\pm \text{ etc.};$$

si p est de la forme $8k+3$,

$$y = 2x^{4k+1}+x^{4k}-2kx^{4k-1}+(k+1)x^{4k-2}\pm \text{ etc.}$$
$$z = x^{4k}+0.x^{4k-1}+(k-1)x^{4k-2}\pm \text{ etc.};$$

a l'égard des nombres de la forme $8k+7$,

$$y = 2x^{4k+3}+x^{4k+2}-(2k+1)x^{4k+1}-(3k+2)x^{4k}\pm \text{ etc.}$$
$$z = x^{4k+2}+x^{4k+1}\pm \text{ etc.}$$

L'équation $\frac{4(x^{p^n}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$, dans laquelle n représente un nombre entier quelconque, est une simple généralisation de l'équation de Mr. Gauſs. En faisant $n=2$ on a $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$. Si on peut appliquer la remarque de Mr. Le Gendre à cette équation, on dira que les coëfficiens des différentes puissances de x, dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ sont congrus (mod. p), aux coëfficiens des mêmes puissances, dans la valeur $\partial' Y'$.

Il est évident que le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ se compose de $\frac{p^2+1}{2}$ termes; et, pour peu qu'on veuille y faire attention, on verra que les coëfficiens des $\frac{p+1}{2}$ premiers de ces termes, si on essaye de les diviser par p, laisseront tous un reste; tandis que les coëfficiens des $\frac{p-1}{2}$ termes suivans n'en laisseront pas, que les $\frac{p+1}{2}$ termes écrits à la suite de ces derniers auront aussi pour coëfficiens des nombres non divisibles par p, et qu'ils seront suivis de $\frac{p-1}{2}$ termes, dont les coëfficiens sont au contraire des multiples de ce nombre, et ainsi de suite.

Les seules puissances de x qui puissent faire parties de la valeur $\partial' Y'$ seront celles dont les coëfficiens, dans le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$, ne sont pas divisibles par p.

La valeur de Y' est donc formée de $\frac{p+1}{2}$ suites composées chacune de $\frac{p+1}{2}$ termes, qui renferment autant de puissances differentes de x. Une quelconque de ces suites est séparée de la suivante par une lacune de $\frac{p-1}{2}$ termes, renfermant autant de puissances différentes de x; et, parceque les premiers et les derniers termes de la valeur de Y', appartiennent a deux séries de $\frac{p+1}{2}$ termes, on voit qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ lacunes, de $\frac{p-1}{2}$ termes chacune, qui dans la valeur de Y', séparent les unes des autres les $\frac{p+1}{2}$ séries, de $\frac{p+1}{2}$ termes chacune, dont les coëfficiens, abstraction faite du signe, sont plus grands que zéro.

La forme générale des puissances de x qui appartiennent aux $\frac{p+1}{2}$ termes dont se composent les $\frac{p+1}{2}$ séries est $x^{\frac{p^2-(2vp+2s+1)}{2}}$, dans laquelle on donnera à v, aussi bien qu'à s, les valeurs successives, $0, 1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}$.

Pour une même série les valeurs de s seront les seules qui changeront; tandis que le changement attribué à v marquera le passage d'une série à une autre.

La forme générale des puissances de x qui ne font pas parties de la valeur $\partial' Y'$ est $x^{\frac{p^2-(2k+1)p+2h}{2}}$. En donnant successivement à h les valeurs $1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}$, et ne changeant pas celles de k, on a les $\frac{p-1}{2}$ puissances de x qui se suivent immédiatement; et, en attribuant successivement à k les valeurs $0, 1, 2 \ldots . \frac{p-1}{2}-1$, on passe d'une de ces suites à une autre dont tous les termes ont également zéro pour coëfficiens.

Il résulte de ce qu'on vient de dire que parmi les puissances de x qui appartiennent aux $\frac{p^2+1}{2}$ termes dont se compose le développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$, un nombre $\frac{p+1}{2}.\frac{p+1}{2}$, seulement, fait partie de la valeur

de Y'; tandis qu'un nombre $\frac{p-1}{2}.\frac{p-1}{2}$ de ces puissances en est retranché. Si on remonte à la manière dont se forme l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$, le calcul immédiat des valeurs de Y' fournira à la fois la confirmation et l'exemple de cet arrangement entre les puissances de x.

En effet pour former l'équation $\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=Y'^2\pm pZ'^2$ on reprend l'équation $\frac{4(x^p-1)}{x-1}=y^2\pm pz^2$, on écrit une seconde fois la même équation en y changeant x en x^p et y et z en Y et Z ce qui donne $\frac{x(x^{p^2}-1)}{x^p-1}=Y^2\pm pZ^2$ et après avoir multiplié l'un par l'autre les membres respectifs de ces équations, on trouve

$$\frac{4(x^{p^2}-1)}{x-1}=\frac{(Yy\mp pZz)^2}{2}\pm p\frac{(Yz+Zy)^2}{2}=Y'^2\pm pZ'^2.$$

Soient $p=3$, on aura $Y'=\frac{Yy-3zZ}{2}=\frac{(2x+1)(2x^3+1)-3}{2}=2x^3+x^3|+x-2$,

- $p=5$ - - $Y'=(Yy+5Zz):2$

$$=\frac{(2x^2+x+2)(2x^{10}+x^5+2)+5x^6}{2}$$

$$=2x^{12}+x^{11}+2x^{10}|+x^7+3x^6+x^5|+2x^2+x+2,$$

- $p=7$ - - $Y'=(Yy-7Zz):2$

$$=\frac{(2x^3+x^2-x-2)(2x^{21}+x^{14}-x^7-2)-|(x^2+x)(x^{14}+x^7)}{2}$$

$$=2x^{24}+x^{23}-x^{22}-2x^{21}|+x^{17}-3x^{16}-4x^{15}-x^{14}|$$
$$-x^{10}-4x^9-3x^8+x^7|-2x^3-x^2+x+2,$$

- $p=11$ - - $Y'=(Yy-11Zz):2$

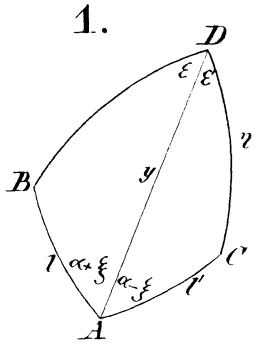
$$=\frac{(2x^5+x^4-2x^3+2x^2-x-z)(2x^{55}+x^{44}-2x^{33}+2x^{22}-x^{11}-2)-11(x^4+x)(x^{44}+x^{11})}{2}$$

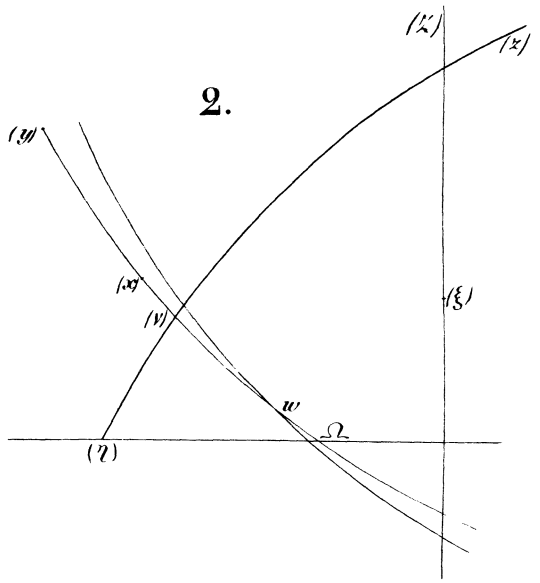
$$=2x^{60}+x^{59}-2x^{58}+2x^{57}-x^{56}-2x^{55}|+x^{49}-5x^{48}-x^{47}+x^{46}-6x^{45}-x^{44}|$$
$$-2x^{38}-x^{37}+2x^{36}-2x^{35}+x^{34}+2x^{33}|+2x^{27}+x^{26}-2x^{25}+2x^{24}-x^{23}-2x^{22}|$$
$$-x^{16}-6x^{15}+x^{14}-x^{13}-5x^{12}+x^{11}|-2x^5-x^4+2x^3-2x^2+x+2.$$

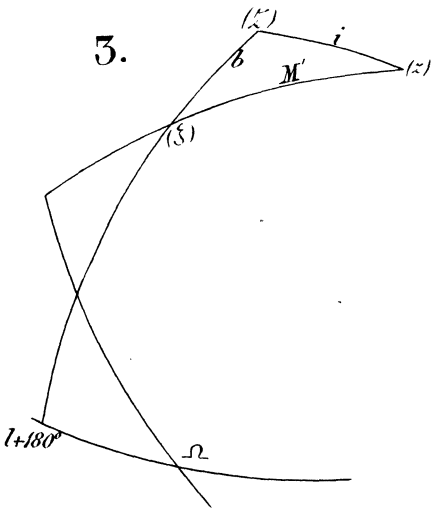
Ce petit nombre d'exemples, dans lesquels on a separé les différentes séries de $\frac{p+1}{2}$ termes par ce signe |, suffit sans doute pour montrer que le calcul direct confirme pleinement ce que la considération du développement de $2(x-1)^{\frac{p^2-1}{2}}$ nous a appris touchant la manière dont la valeur de Y' doit être composée.

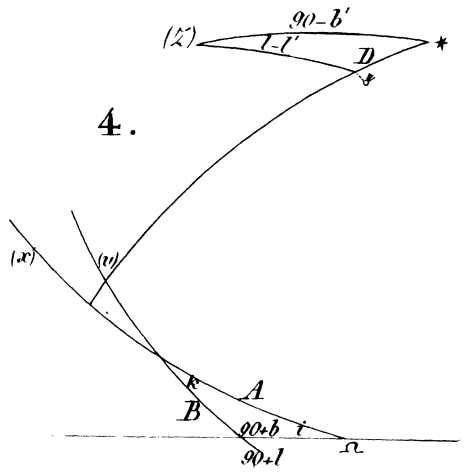
A l'égard de la valeur de Z', il est évident qu'elle ne peut contenir aucune des puissances de x qui manquent dans celle de Y' et c'est ce que le calcul direct confirme également.

Taf. II.


1.
D
ε
ε
η
B
y
l
α+ξ
α−ξ
l'
C
A


2.
(z')
(z)
(y)
(x)
(v)
(ξ)
w
Ω
(η)


3.
(z')
i
b
M'
(z)
(ξ)
l+180°
Ω


90−b'
(z')
l−l'
D
*
4.
(x')
(v)
A
B
90+b
i
90+l
Ω