1.

Mémoire sur la courbure des surfaces.

(Par Melle Sophie Germain à Paris.)

Observations préliminaires.

Les surfaces ont été l'objet d'un grand nombre de travaux, et cependant, si l'on cherche à pressentir quel obstacle pourroit, à la première vue décourager le lecteur, on est moins frappé de l'espèce de satiété qui s'attache au sujet que de la trop grande nouveauté de l'aspect sous lequel on a cru devoir l'envisager.

On se propose, en effet, dans ce mémoire, de signaler et de définir un genre de quantités dont l'existence ne paroit pas avoir été soupçonnée; et, en traitant une matière qui semble épuisée, on sera forcé de recourir à des distinctions inusitées, à des notions singulières en apparence. Sans doute, il est à craindre que de telles recherches qui n'auront ni l'appui d'un nom celèbre, ni, malgré tous mes soins, le secours d'une exposition lumineuse soient faiblement accuellies; le moindre degré d'attention suffiroit cependant pour reconnoître que ces distinctions sont fondées, et que ces notions résultent du point de vue sous lequel la courbure des surfaces se présente dans de certaines questions. la courbure entre en comparaison avec des quantités dynamiques, on ne peut se dissimuler qu'elle est tacitement traitée comme une quantité du même genre. Les surfaces ne sont donc plus considérées par rapport à elles seules, et il ne s'agit pas de leurs propriétés particulières, ni de celles qui sont communes à une classe d'entr'elles. Ce dont il s'agit alors c'est de définir la quantité dynamique née de la courbure. Or cette quantité ne dépend pas de la figure des surfaces, mais d'une condition qui est remplie par un nombre infini de surfaces différentes. De là naissent des distinctions nécessaires, mais dont l'usage n'a pas encore été consacré; des notions simples, mais qui n'ont jamais été textuellement exprimées. dès le début de ce mémoire, on étoit dans l'obligation de s'expliquer et sur ces notions et sur les distinctions qu'elles rendent indispensables, la tâche seroit extrèmement difficile. Par l'ordre même des idées on se trouve placé dans une position beaucoup plus favorable.

Il convient d'examiner d'abord quelles sont les courbures linéaires dues aux intersections des plans menés par un des points de la surface; et les recherches d'Euler offrent, à cet égard, les secours qu'on peut désirer. Le premier paragraphe du présent mémoire pourra être regardé comme le développement de celui de cet illustre géometre sur la courbure des surfaces; et la simple combinaison des formules conduira à déterminer la loi à laquelle est assujéttie la repartition de la courbure linéaire. Cette loi sera ensuite présentée comme un cas partieulier d'une loi générale, dont un exemple emprunté à la distribution de la chaleur offrira une seconde application.

Après avoir développé les conséquences immédiates des principes adoptés depuis longtems, on exposera quelques considérations nouvelles sur la courbure des surfaces. L'examen de la manière dont la courbure est repartie, révèlera bientôt l'existence d'une quantité moyenne dépendante de la courbure, mais commune à un nombre infini de surfaces de figures différentes.

Le lecteur verra que dans les questions dynamiques, où la courbure entre en considération, tandis que la somme des forces nées de cette courbure, est indépendante de la figure de la surface, la répartition des mêmes forces autour du point donné dépend, au contraire, de cette figure; en sorte que la loi de répartition de la courbure linéaire autour d'un point choisi sur la surface, offre la plus entière parité avec ce que l'on sait relativement à la composition des forces qui agiroient autour de ce point.

Une construction dont l'idée se présente assez naturellement servira à rendre sensible et la distribution de la courbure et l'équivalence des figures différentes auxquelles appartient une même courbure moyenne.

Ces variétés sont toutes comprises dans le cas où les rayons de courbures principales sont dirigés du même côté. Afin de ne rien laisser à désirer sur ce qui concerne la courbure moyenne, on montrera quels sont les changemens graduels qu'éprouve cette courbure dans le cas contraire.

La dernière partie de ce travail, bien qu'intimément liée à la première, en est pourtant distincte. S'il arrivoit donc, contre toute attente, qu'elle devint l'objet de quelqu'objection, l'autre partie, où, ayant eu soin d'écarter les idées qui me seroient particulières, je me suis constamment laissé guider par les travaux d'Euler, devroit au moins en être à l'abri.

Mémoire

§. 1.

Des recherches d'Euler et des conséquences qu'on en peut tirer.

1. Si, par rapport aux surfaces, on avoit besoin de connoître la mesure de la courbure, on trouveroit peu de secours dans les écrits des géomètres qui se sont occupés des diverses questions dont se compose la géométrie descriptive, et l'on seroit forcé de remonter à des travaux plus anciens.

Le mémoire d'Euler, intitulé: "Recherches sur la courbure des surfaces (M. de Berlin, 1760, p. 119.) contient, en effet, tout ce que l'on sait d'important à cet égard; et, en lisant ce beau mémoire, on apperçoit bientôt que l'illustre auteur y a déposé le germe des recherches, qui peuvent faire disparoître les difficultés qu'il a pris soin de signaler.

Dans la vue de fixer le point de départ, on reproduira ici les premiers passages de ce mémoire.

Plus bas (p. 120.) on lit: "Mais, pour le sujet présent, il suffit de ne considérer de toutes ces infinies sections que celles qui sont perpendiculaires à la surface, dont le nombre est pourtant encore infini et l'assemblage de tous ces rayons (ceux des courbes produites

par les sections normales) nous donnera la juste mesure de la courbure de la surface au point donné."

Lorsque je proposai de représenter la courbure d'une surface par la somme des raisons inverses des deux rayons de ses courbures principales, l'objection indiquée d'avance dans le premier des passages qu'on vient de lire fut reproduite; et les opposans parurent croire que, parmi le nombre infini des courbes contenues dans les différens plans menés par un des points de la surface, le choix des courbures principales étoit arbitraire.

Dans le mémoire envoyé à l'Académie, pour le concours de 1816, je pris la somme des raisons inverses des rayons des courbures qui résultent de toutes les intersections que produisent les différentes positions du plan mené par le point donné.

On sait que la formule qui exprime la courbure due aux sections obliques, renferme le cosinus de l'inclinaison. Cette formule appartient, je crois, à Meunier mort lorsqu'il étoit encore élève de l'école polytechnique. Quoiqu'il en soit, en prenant par rapport à chacune des positions du plan normal, la somme de toutes les sections inclinées, chaque valeur du cosinus est écrite avec des signes opposés; cette somme disparoit donc, et, par conséquent, il ne reste plus, dans la somme générale, que les seules valeurs dues aux sections normales. J'ai fait voir que cette dernière somme est uniquement composée des raisons inverses des rayons de principales courbures pris un nombre infini de fois, en sorte que la somme totale n'est autre chose que le résultat d'opérations équivalentes, dont une seule suffiroit pour exprimer la courbure de la surface.

Un pareil raisonnement étoit conforme à l'indication donnée par Euler; car on vient de voir que cet habile géomètre pensoit, sans qu'il ait pourtant témoigné l'avoir vérifié, qu'on pouvoit mettre à l'écart les sections obliques et que la somme des sections normales conduiroit à connoître "la juste mesure de la courbure de la surface au point donné." Il étoit d'ailleurs évident, que l'idée de l'infini, étrangère à une semblable mesure, y avoit été introduite par la multiplicité des opérations, multiplicité à laquelle avoit donné lieu la forme du raisonnement, et non la nature de la question.

Quoiqu'il en soit du mérite de cette démonstration, elle fut formellement désapprouvée; et. la légitimité de l'hypothèse ne cessant pas d'être contestée, il parut nécessaire d'examiner de nouveau quelle est, par rapport aux surfaces, l'expression de la courbure.

2. On vient de dire qu'il est permis de mettre à l'écart les courbures dues aux sections obliques; dans la suite, de nouvelles considérations serviront à établir que ces courbures sont, en effet, étrangères à la question des surfaces. Sans qu'il soit besoin d'en avertir de nouveau, nous nous bornerons donc dès-à-présent à nous occuper des seules sections normales.

Si, conformément à la remarque d'Euler, les deux courbures principales suffisent pour déterminer la courbure de l'élément d'une surface, on ne peut cependant se faire une idée complète de cette courbure, sans recourir à l'examen des courbures linéaires qui ont une origine commune avec les courbures principales.

Soient f et g les rayons de plus grande et de moindre courbures, r et r' les rayons qui appartiennent aux plans faisant, l'un l'angle φ , l'autre l'angle $\varphi + \frac{\pi}{2}$, avec celui de plus grande courbure, les formules d'Euler donnent:

$$r = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\varphi},$$

$$r' = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

d'où on tire:

$$\frac{1}{r} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2\varphi}{2fg},$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(\varphi + \frac{\pi}{2})}{2fg} = \frac{f + g + (f - g)\cos 2\varphi}{2fg},$$

et par conséquent

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

Par construction, les plans qui contiennent les courbures exprimées par $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{r'}$ sont perpendiculaires entr'eux et ne sont assujettis à aucune autre condition.

Quelle que soit d'ailleurs la position de deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, la somme des courbures contenues dans ces plans est donc une quantité constante. Dans le mémoire dont nous avons déjà parlé, on avoit fait usage de cette remarque; et on a lieu de croire qu'elle n'avoit pas encore été faite.

3. Parmi les positions des deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, celle qui est déterminée par la valeur 45° de l'angle ϕ est très remarquable.

On a alors:

$$\frac{1}{r} = \frac{f + g - (f - g)\cos 90^{\circ}}{2fg} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right),$$

$$\frac{1}{r'} = \frac{f + g + (f - g)\cos 90^{\circ}}{2fg} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right).$$

Ainsi, les courbures contenues dans l'un et l'autre de ces plans sont égales entr'elles. Elles doivent donc être égales, comme elles le sont en effet, à la demi-somme des courbures principales.

En ayant égard à leur position seule, position qui partage en deux parties égales la distance angulaire entre les plans principaux, on est suffisamment autorisé à nommer plans moyens ceux qui contiennent les courbures égales à la demi-somme des courbures principales.

4. R et R' étant les rayons contenus dans les deux plans qui, de part et d'autre du plan de plus grande courbure, font avec lui l'angle w, on trouve:

$$\frac{1}{R} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2w}{2fg},$$

$$\frac{1}{R'} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(2\pi - w)}{2fg} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2w}{2fg}.$$

Les courbures contenues dans l'un et l'autre de ces plans sont donc égames entr'elles. Cette égalité est indépendante de la valeur de l'angle w; mais, parmi les systèmes de deux plans ainsi choisis, la valeur $w=45^{\circ}$ est la seule qui satisfasse en même tems à cette autre condition, que la somme des deux courbures soit égale à celle des courbures principales.

5. R, et $R_{\prime\prime}$, étant les rayons contenus dans les deux plans qui, de part et d'autre de l'un des plans moyens, font avec lui l'angle ω' , on a:

$$\frac{1}{R_{,}} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(45^{\circ} + w')}{2fg} = \frac{f + g + (f - g)\sin 2w'}{2fg};$$

$$\frac{1}{R_{,\prime\prime}} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(45^{\circ} - w')}{2fg} = \frac{f + g - (f - g)\sin 2w'}{2fg};$$

et par conséquent:

$$\frac{1}{R_{\prime}}+\frac{1}{R_{\prime\prime}}=\frac{1}{f}+\frac{1}{g}.$$

La somme des courbures qui appartiennent à l'un et à l'autre plan, est donc égale à celle des courbures principales.

Cette égalité est indépendante de la valeur de l'angle w': mais, parmi les systèmes des deux plans ainsi choisis, la valeur $w'=45^{\circ}$ est la seule qui satisfasse à cette autre condition, que les deux courbures qui composent la somme dont il s'agit, soient égales entr'elles.

§. 2.

Distribution de la courbure linéaire autour de chacun des points de la surface.

1. Quelle que soit la diversité des surfaces, les courbures linéaires produites par l'intersection du plan normal qui prendroit successivement toutes les positions possibles autour d'un point donné, offrira toujours le même arrangement symétrique.

Cet arrangement constitue ce que nous nommerons dorénavant: loi de distribution de la courbure autour de chacun des points de la surface.

On a pu remarquer que la courbure contenue dans les plans moyens joue, par rapport à toutes les autres, le rôle d'une moyenne.

La dénomination de courbure moyenne convient donc ici à aussi juste titre que celle de courbures principales, imposée depuis longtems à la plus grande et à la moindre des courbures linéaires réparties autour d'un des points de la surface. Il est, en effet, également nécessaire, de distinguer, parmi tant de courbures diverses, celles qui, entre toutes les autres, jouissent de propriétés qui leur sont particulières.

La loi qui nous occupe se compose des propositions suivantes, dont les équations démontrées d'avance dans le paragraphe précédent, doivent être regardées comme l'expression analytique.

Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs la position de deux plans normaux, perpendiculaires entr'eux, menés par un point donné de la surface, la somme des courbures contenues dans ces deux plans sera toujours la même; par conséquent, cette somme sera égale à celle des courbures principales.

Ainsi, l'intervalle angulaire entre les grandeurs extrèmes de la courbure donne celui qui sépare les deux courbures, d'ailleurs différentes, dont la somme est constante: cette proposition est appuyée sur l'équation

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}$$
 (§. 1. No. 2.).

2. La loi de distribution de la courbure sera exprimée d'une manière plus élégante, si, au lieu de considérer la moitié du contour du point donné, on embrasse ce contour entier.

Selon cette manière d'envisager les choses, la prolongation d'un même plan en deçu et au delà du point par lequel il a été mené, sera regardée comme donnant lieu à deux positions distinctes du plan normal.

L'équation $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f} + \frac{1}{g} \right)$, §. 1. No. 3., suffit pour établir que la courbure contenue dans chacun des plans moyens est, en effet, moyenne entre les courbures principales de la surface.

Une proposition plus générale peut être énoncée comme il suit:

Seconde proposition. En prenant la courbure moyenne pour origine, si on mêne les deux plans moyens prolongés en deça et au delà du point donné, ces plans partageront le contour du même point en quatre régions dont l'état sera pareil, mais de signe opposé. Chaque courbure linéaire comprise dans une de ces parties aura une courbure qui excèdera la courbure moyenne d'une quantité proportionnelle au sinus de l'angle doublé formé entre le plan auquel cette courbure appartient et le plan moyen.

Chaque courbure comprise dans la partie contigue aura une courbure moindre que la courbure moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partic.

Les équations

$$\frac{1}{R_{,}} = \frac{f + g + (f - g)\sin 2w'}{2fg},$$

$$\frac{1}{R_{,\prime\prime}} = \frac{f + g - (f - g)\sin 2w'}{2fg},$$

démontrées (§. 1. No. 5.) contiennent cette proposition toute entière. Car tandisque le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{f}+\frac{1}{g}\right)$ représente la courbure moyenne, le terme $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{g}-\frac{1}{f}\right)\sin w'$, pris avec des signes différens suivant la région à la quelle la courbure appartient, exprime soit l'excès soit la différence de cette courbure comparée à la courbure moyenne.

On peut conclure de là qu'il suffit, pour être en état de déterminer toutes les courbures linéaires reparties autour du point choisi, de connoître la courbure moyenne en même tems que la valeur et la position d'une quelconque de ces courbures.

Troisième proposition. Il existe, en général, autour du point donné, quatre directions suivant lesquelles les courbes contenues dans les plans normaux sont semblables. A l'égard des plans principaux, le nombre des courbures semblables se réduit à deux.

Les équations démontrées §. 1. No. 4. sont relatives à la plus grande courbure, mais elles auroient également lieu par rapport à la moindre.

Ces équations servent à établir la légitimité de notre dernière proposition. Car elles montrent que, de part et d'autre, et à égale distance d'une des courbures principales, se trouvent deux courbures égales entr'elles. Elles montrent, en même tems, que, quand on a w=0, les deux positions se confondent en une seule, qui n'est autre que celle d'une des courbures principales.

Une conséquence immédiate de notre troisième proposition nous ramène à ce qu'on sait déjà touchant les sphères qui ont leur centre sur la normale à la surface.

Il est évident, en effet, que, chacune des courbures principales se trouvant deux fois seulement dans le contour entier du point donné, et étant par conséquent contenues dans la prolongation d'un seul et même plan, les sphères décrites de ces rayons toucheront, mais ne couperont la surface; tandis que, par une conséquence inverse, les sphères décrites des rayons compris entre ces deux limites couperont, au contraire, la même surface.

Parmi les sphères qui coupent la surface, il convient de distinguer la sphère à laquelle appartient le rayon contenu dans les plans moyens. Les quatre quadrans de cette sphère sont alternativement situés au dedans et au dehors de la surface; nous la nommerons sphère de moyenne courbure; et elle donnera lieu à des remarques qui seront exposées dans le paragraphe suivant.

3. Les propositions qui viennent d'être expliquées sont tellement liées que deux d'entr'elles ne sauroient subsister sans que la troisième s'en suive. Ainsi, pour que la somme des courbures contenues dans deux plans perpendiculaires entr'eux soit toujours la même, quelle que soit d'ailleurs la position de ces plans (prem. prop.) et qu'indépendamment de la valeur de l'angle choisi, cette somme soit encore la même, si les courbures qui la composent sont contenues dans les deux plans qui, de part et d'autre d'un des plans de courbure moyenne, font avec lui des angles égaux (sec. prop.), il faut qu'on puisse trouver, en général, quatre positions du plan normal qui contienne une même courbure, et que le nombre de ces positions se réduise à deux s'il s'agit des courbures principales.

Et, en effet, le complément d'une courbure quelconque à la somme constante, étant, en vertu des deux premières propositions, fourni par deux positions différentes du plan normal prises l'une et l'autre dans le demi-contour du point choisi, il doit se trouver quatre positions douées de la même propriété dans le contour entier: à moins, toutefois, que les deux positions se confondent en une seule; ce qui ne peut arriver que par rapport aux courbures principales.

On verra de même que la première et la troisième propositions conduisent à la seconde, la seconde et la troisième à la première.

En examinant, tant en elles mêmes que dans leurs rapports mutuels les diverses propositions dont se compose la loi de la distribution de la courbure, on reconnoit bientôt qu'il s'agit ici d'une loi d'ordre et d'arrangement, dont le caractère, étranger à l'idée de la courbure, dépend uniquement de l'existence de quantités extrèmes et de la considération de l'espace circulaire dans lequel doivent se ranger les quantités intermédiaires.

L'existence des quantités extrèmes entraine, en effet, celle d'une quantité moyenne. Si on connoît la position des quantités extrèmes, on connoîtra aussi la position de la quantité moyenne; car il est évident que celle-ci occupe le milieu de la distance angulaire entre les premières.

Les quantités extrèmes partagent la circonférence en un nombre de parties qui dépend de cette distance; les quantités moyennes, en même nombre que ces parties, partagent donc aussi la circonférence en autant de parties. π représentant, comme à l'ordinaire, la demi-circonférence, si l'intervalle angulaire entre les quantités extrèmes est exprimé par $\frac{\pi}{n}$, 2n sera le nombre de ces parties.

Par la nature des quantités moyennes, de part et d'autre de chacune d'elles, on doit trouver deux quantités dont la somme soit égale à celle des quantités extrèmes.

Cette remarque nous ramène à la seconde proposition, et rien ne seroit plus facile que de déduire également des rapports généraux qui viennent d'être indiqués des deux autres propositions. Sans nous arrêter au développement des raisonnemens qui pourroient servir à établir chacune des propositions générales, nous nous contenterons de les exprimer comme il suit:

Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs leur position, la somme des valeurs distantes de l'angle $\frac{\pi}{n}$ sera toujours la même; par conséquent, cette somme sera égale à celle des valeurs extrèmes.

Seconde proposition. Si on mène les diamètres qui joignent deux à deux les points qui sont en possession des valeurs moyennes, la circonférence sera partagée en 2n régions, dont l'état comparé à l'état moyen sera pareil, mais de signe opposé. Chaque valeur comprise dans une de ces parties excèdera la valeur moyenne. Chaque valeur comprise dans la partie contigue sera moindre que la valeur moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partie.

Troisième proposition. Il existe, en général, autour du centre 2n positions où les valeurs sont semblables entr'elles. A l'égard des valeurs extrèmes le nombre de ces positions se réduit à n.

La loi de distribution de la courbure offre le cas où n=2. En prenant n=1, on a celle qui convient à la distribution de la chaleur dans l'armille telle qu'elle a été donnée par Mr. Fourier (Théorie de la chaleur p. 277. — 282.). n étant ici l'unité, la distance entre les quantités extrèmes est la demi-circonférence. En rapprochant les passages que séparent des développemens inutiles à la comparaison que nous avons en vue, on lit:

"Si dans cet état (celui qui s'établit au bout d'un certain tems), on choisit deux points de l'anneau, situés aux deux extrémités d'un même diamètre , la demi-somme des températures des points opposés sera une quantité qui seroit encore la même, si on avoit choisi deux points situés aux extrémités d'un autre diamètre."

Tel est en effet ce que doit devenir la proposition première, lorsque l'intervalle est de la moitié, au lieu du quart de la circonférence.

Cette proposition est, comme on le voit, entièrement semblable à notre seconde proposition.

A l'égard de la troisième, elle peut être exprimée comme il suit:

Le diamètre qui joint les points doués des températures extrèmes divise la circonférence en deux parties dont l'état est pareil et de même signe; en sorte que toute temperature comprise entre les températures extrèmes appartient à la fois à deux points différens de l'armille; tandis que celles-ci appartiennent à un seul point.

Cette proposition ne peut, à la vérité, être comme les précédentes, extraite textuellement du livre cité; mais elle résulte des formules qui y sont données.

5. Non seulement la loi d'ordre et de symmétrie dont nous avons montré la généralité établit des rapports nécessaires entre les arrangemens qui conviennent aux faits, d'ailleurs les plus différens, quand ils remplissent la double condition de nous offrir des valeurs extrèmes et de se développer dans un espace circulaire; mais on peut encore remarquer qu'il existe une correspondance frappante entre le cas relatif à la distribution de la courbure et ce qu'on sait touchant la composition des forces.

Ainsi, quelle que soit leur nature, les forces qui agiront sur un plan donné pourront être décomposées suivant la direction de deux plans perpendiculaires entr'eux dont la direction est assujettie à la seule condition de passer par le point donné. Parmi les systèmes des deux plans perpendiculaires entr'eux, se trouvera nécessairement le système, où les deux portions de forces qui agissent selon chacun des deux plans sont plus différentes que dans tout autre système; et, si on connoit la position d'un tel système, on sera conduit à trouver celle du système où les forces qui agissent selon chacun des deux plans sont égales entr'elles.

Si nous supposions présentement qu'il y ait des cas où la courbure d'une surface puisse donner naissance à de certaines forces, ces forces devant être susceptibles des décompositions qui viennent d'être mentionnées, nous nous trouverions conduits à admettre, à la vérité par pure induction, que, quelle que soit d'aîlleurs la diversité des positions, la somme des courbures contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est toujours la même, et que, parmi ces positions, il doit s'en trouver une où les courbures qui appartiennent à chacun des deux plans seront égales entr'elles.

De quelque côté qu'on envisage les choses, on est donc ramené vers cette même loi qui, déduite d'abord des formules d'Euler, se présente également comme une nécessité d'ordre et d'arrangement et comme une représentation, tracée d'avance, des quantités dynamiques qui pourroient naître, dans certains cas, de la courbure des surfaces.

La considération de la courbure moyenne répandra, comme on le verra bientôt, un jour nouveau sur les questions de ce genre; aussi, après nous être borné dans ce qui précède à développer les conséquences de vérités généralement admises, ne craindrons-nous plus de recourir aux distinctions et aux notions nouvelles dont nous avons déjà fait préssentir la nécessité.

§. 3.

De la courbure moyenne des surfaces.

1. Avant d'entrer en matière, nous commencerons par présenter quelques considérations générales sur la courbure des surfaces.

Ayant tracé sur le plan un cercle et les rayons qui aboutissent aux différens points de la circonférence et ayant mené par chacun de ces ra-

yons autant de plans perpendiculaires au plan du cercle, supposons qu'on fasse contracter à ce plan une courbure cylindrique.

Le centre du cercle n'aura pas été déplacé, et, après la courbure, les plans menés par les rayons, seront encore perpendiculaires à la surface, dans ce point.

Les diverses courbures contractées par les rayons seront donc les courbures linéaires contenues dans les différens plans normaux: et, par conséquent, l'inflexion du plan n'aura fait contracter, à aucun des mêmes rayons, des courbures continues dans les plans obliques. Ainsi, non seulement, et par les raisons apportées (§. 1. No. 1.), ces courbures peuvent être mises à l'écart, mais encore elles doivent être regardées comme entièrement étrangeres à la question des surfaces.

Il en seroit encore de même, si l'élément plan avoit été courbé à la fois dans deux sens différens; pourvu toute fois qu'on admêt que cet élément fût infiniment petit. Et cette supposition convient parfaitement ici, puisqu'il s'agit seulement de déterminer la courbure dans chacun des points de la surface considérés isolément.

Sous cette condition, la différence entre la circonférence du petit cercle tracé sur le plan et le contour de la courbe à laquelle cette circonférence a été ployée par l'effet de la double courbure seroit en effet négligeable. On s'en assurera en imaginant que le petit cercle décrit du rayon u soit devenu celui qui termine une petite calotte sphérique. u sera l'arc dont la courbure fort petite, est comprise entre le centre, actuellement le point le plus élevé de la calotte, et le plan du cercle qui termine la même calotte.

Le rayon de ce dernier cercle sera $\sin u$; et par ce que l'angle u est infiniment petit, on aura $\sin u = u$.

La difficulté de courber à la fois dans deux sens différens la superficie du cercle tracé sur le plan, sans qu'il en résulte aucune duplicature, aura donc disparu; et les considérations qui, dans le cas d'une courbure cylindrique, ont servi à écarter les sections obliques seront applicables au cas général où l'on ne suppose plus que l'une des courbures principales de la surface soit nulle.

Si nous avions uniquement en vue d'examiner les relations diverses qui intéressent la courbure des surfaces, envisagée en elle-même et sans aucun égard à l'influence qu'exerce cette courbure dans certaines questions dynamiques, notre tâche seroit déjà remplie.

Le but principal que nous nous sommes proposé étant, au contraire, de déterminer cette influence, ce qui précède devra être regardé comme une sorte d'introduction, dans laquelle, à l'abri de l'autorité qui nous a servi de guide dans cette première partie de notre travail, nous chercherons un appui en faveur des idées nouvelles qui vont être exposées.

2. En nous occupant de la loi de distribution de la courbure, nous avons reconnu l'existence d'une courbure moyenne, mais cette courbure se présentoit alors comme purement linéaire, et plus loin (§. 3. No. 4.) nous nous sommes bornés à faire observer que la sphère décrite du rayon de moyenne courbure coupe la surface en quatres parties égales, situées alternativement en dedans et en dehors de la sphère.

Il est tems d'examiner les propriétés de cette sphère.

Ce n'est donc plus d'une courbure, moyenne entre les diverses courbures linéaires reparties autour d'un des points de la surface, qu'il s'agit présentement; et, par rapport à la sphère qui coupe la surface en quatre parties égales, cette égalité n'est pas le seul caractère qu'il importe de remarquer.

Nous irons plus loin; nous dirons que la sphère dont les grands cercles possèdent la courbure moyenne linéaire donne véritablement la courbure moyenne de la surface elle même; et, par cette raison, nous la nommerons sphère de courbure moyenne de la surface.

L'utilité de cette proposition que nous restreindrons d'abord au cas où les deux rayons de courbures principales sont dirigés du même côté, est de montrer qu'il existe, sous le rapport dynamique, une quantité de courbure indépendante de la figure des surfaces; en sorte que, quelles que soient les différences entre les courbures linéaires contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, menés par le point donné, tant que la somme de ces courbures, somme qui détermine, seule, la courbure moyenne, demeure la même, les forces nées de la courbure de la surface demeureront aussi les mêmes.

Non seulement la distinction entre la figure et la quantité de courbure qui appartiennent à la surface s'offre à l'esprit lorsqu'on veut se rendre compte du rôle que joue la courbure dans les questions dynamiques; mais encore, comme on le verra tout à l'heure, un examen attentif de la courbure, considérée en elle même, conduit également à cette distinction.

3. Nous nous proposons d'obtenir une représentation géométrique de la courbure moyenne et de montrer, à l'aide d'une construction fort simple, que la quantité de la courbure est indépendante de la manière dont elle est repartie autour d'un point donné de la surface. Pour y parvenir, il nous a paru nécessaire de remonter jusqu'aux notions les plus communes touchant la courbure.

D'abord, à l'égard des courbes linéaires.

L'idée qui se présente la première est de comparer la courbe à sa tangente: ainsi, après avoir fait choix de deux lignes droites d'égale longueur, si on en forme les arcs de deux cercles différens, et qu'on mêne leurs tangentes à un des points d'extrémité de ces arcs, on jugera que celui des deux, dont la seconde extrémité s'éloigne le plus de la tangente, est aussi celui qui a le plus de courbure. La distance entre l'extrémité d'un arc et la tangente menée à l'autre extrémité du même arc est mesurée par une perpendiculaire à la tangente.

Nous nommerons dorénavant cette perpendiculaire ligne de distance.

Il est évident que la ligne de distance est égal au sinus-verse de l'angle correspondant; car cette ligne est parallèle au rayon mené au point de tangence, et elle est comprise entre la tangente et le sinus. De plus, la même ligne est proportionnelle à la raison inverse du rayon de courbure; en sorte qu'on peut dire également de la courbure qu'elle est en raison inverse du rayon, ou en raison directe de la ligne de distance. On verra tout à l'heure que cette dernière manière de s'exprimer, présente de grands avantages quand on cherche à se former une idée complète de la courbure des surfaces.

4. Si nous jugeons qu'une ligne est courbe lorsque nous la voyons s'écarter de la direction d'une droite qui la touche, l'idée de la courbure, par rapport aux surfaces, nous est également suggérée par l'observation de la distance qui sépare le plan tangent des points de la surface voisins du point de tangence.

Pour toute autre surface que celle de la sphère, cette distance n'est pas uniforme.

La question des courbures moyennes peut être énoncée en ces termes: Trouver l'expression de la distance moyenne entre le plan tangent et les points de la surface qui environnent le point de tangence.

Occupons nous d'abord des seules surfaces dont les rayons de principales courbures sont dirigés du même côté.

On a vu que la courbure d'une simple courbe est proportionnelle à une ligne droite, la ligne de distance. Nous allons montrer que la courbure des surfaces est proportionnelle à une surface engendrée par une ligne de distance qui change à chaque instant de grandeur et de position.

Il s'agit présentement de décrire la courbe qui doit diriger le mouvement de la génératrice.

Après avoir mené par le point choisi le plan normal à la surface, on donnera successivement à ce plan toutes les positions dont il est susceptible. Sur chacune des courbes produites par les diverses intersections du plan normal et de la surface on prendra des arcs infiniment petits, assujettis à cette condition que, s'ils étoient étendus en lignes droites, ils donneroient tous des longueurs égales. La courbe qui joint les extrémités de ces arcs sera la directrice que nous avons cherchée.

Cette courbe est à double courbure.

Si on concoit le plan tangent à la surface dans le point donné et la perpendiculaire à ce plan qui tombe sur un des points de la directrice, il est clair que cette ligne ne sera autre que la ligne de distance contenue dans celui des plans normaux auquel appartient la courbe que termine le point choisi sur la directrice. La ligne de distance, en changeant à chaque instant de grandeur, et en parcourant successivement tous les points de la courbe qui dirige son mouvement, sans cesser d'être perpendiculaire au plan tangent, engendrera une surface que les plans de moyennes courbures diviseront en quatre parties.

Il est clair que la surface dont nous nous occupons est composée des lignes de distances, en nombre infini, qui appartiennent aux courbes, également en nombre infini, formées par l'intersection des différens plans normaux qui passent par le point donné de la surface, point par rapport auquel on veut connoître l'expression de la courbure. La surface

composée des lignes de distances sera nommée par cette raison, surface des distances.

On a vu que la courbure d'une simple ligne courbe est proportionnelle à la ligne de distance. En nous laissant conduire ici par l'analogie, nous dirons que, dans le point donné, la courbure de la surface est proportionnelle à la surface des distances décrite autour de ce point. La surface des distances est le segment d'une surface cylindrique ayant pour base la courbe rentrante que les positions successives de la génératrice tracent sur le plan tangent: ce segment est terminé à l'autre extrémité par la directrice. Cette courbe dépend de la figure de la surface à laquelle appartient la surfaces de distances.

Avant d'aller plus loin, il est bon de faire remarquer que la petite courbe rentrante qui sert de base à la surface des distances peut toujours être regardée comme un cercle parfait. En effet, il est évident que la plus grande différence qui puisse exister entre les deux diamètres de cette courbe correspond au cas des surfaces cylindriques. Mais, alors, en adoptant les suppositions et les dénominations No. 1., l'un de ces diamètres étant u, l'autre sera sin u, et on aura sin u = u.

Les plans de courbures moyennes contiennent évidemment les lignes de distances moyennes; ils coupent à la fois la surface des distances, qu'ils partagent en quatre parties symmétriques, la surface donnée, et la sphère de moyenne courbure définie No. 2.

5. Lorsque la surface est sphérique, la courbure autour de chacun de ses points est uniforme; et, par conséquent, dans un rayon donné, les points environnans le point de tangence sont tous également distans de ce point.

Si, du point de tangence, pris pour centre, on décrit, sur la sphère de moyenne courbure, un cercle dont le rayon soît le sinus de l'arc, ou, à cause de la petitesse, l'arc même à l'extrémité duquel appartient la ligne de distance, ce cercle sera la directrice du mouvement de la même ligne de distance, qui, sans changer de grandeur et sans cesser d'être perpendiculaire au plan tangent, engendrera la surface à laquelle la courbure de la sphère est proportionnelle.

Cette surface sera celle des distances moyennes.

La surface des distances moyennes est cylindrique: elle a pour base le cercle que les positions successives de la génératrice tracent sur le plan tangent: elle est terminée, à l'autre extrémité, par la directrice.

Si, pour deux surfaces données, de figures différentes, la somme des courbures principales, et, par conséquent aussi, le rayon de la sphère de moyenne courbure sont les mêmes, la surface des distances moyennes sera aussi la même.

Ainsi, tandis que la surface des distances dépend à la fois et de la courbure moyenne et de la figure de la surface donnée, la considération de la surface des distances moyennes, isolant l'idée de la figure de celle de la distance au plan tangent, offre une représentation separée de l'une des deux affections qui ont toujours été confondus, savoir la figure et la quantité de courbure qu'une surface possède dans chacun de ses points.

La justesse de ce raisonnement exige que les deux surfaces des distances, quoique différentes par leur forme, ayent pourtant la même étendue, puisque de cette étendue dépend évidemment la quantité de courbure, ou, en d'autres termes, la somme des distances entre le plan tangent et les points de la surface qui environnent le point de tangence.

Pour établir l'égalité d'étendue entre les deux surfaces des distances, il suffiroit peut-être de faire remarquer qu'il existe entre les lignes de distances les mêmes relations qu'entre les courbures auxquelles ces lignes sont proportionnelles.

On dira donc, en vertu de la loi de distribution de la courbure, exposée (§. 1. No. 2. et 3.), que la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est indépendante du choix de ces plans, et que la ligne de distance moyenne, c'est-à-dire la génératrice de la surface des distances moyennes est ellemême moyenne entre les deux premières lignes des distances.

Cela posé, quand on prend, sur l'une et l'autre des surfaces des distances, un nombre de positions, convenablement choisies, des génératrices, la somme de ces lignes est égale de part et d'autre. Si le nombre des positions de la génératrice est infini, ces positions épuiseront l'étendue de la surface. On en peut conclure que l'étendue elle même est égale de part et d'autre.

L'égalité d'étendue entre les deux surfaces des distances étant, ici, d'une grande importance, nous allons essayer de la rendre sensible; et,

pour cela, nous aurons recours à la considération du développement de ces surfaces.

On a vu, No. 4., que les plans de courbures moyennes coupent, à la fois, la surface donnée, la surface des distances, qu'ils partagent en quatre parties symmétriques, et la sphère de courbure moyenne. Les mêmes plans coupent dont aussi la surface des distances moyennes, qu'ils partagent en quatre parties égales; et, par conséquent il y a intersection, en même tems, entre les deux surfaces des distances.

Nous avons dit, plus haut, que la courbe rentrante qui sert de base à la surface des distances peut être regardée comme un cercle parfait. Cela posé, soit ABDC (Pl. I. Fig. 1.) le développement de la surface des distances moyennes, AC sera le développement du cercle qui sert de base à l'une et à l'autre des surfaces des distances.

Le parallèlogramme ABDC (Fig. 1.) sera divisé en quatre parties égales au moyen des trois lignes mn, m'n' et m''n'' parallèles aux côtés AB et CD. On divisera encore en deux parties égales les intervalles Am, mm', m'm'' et m''c; des points de division on portera, toujours parallèlement aux côtés AB et CD, les lignes pq, p'q' de moindres, et gh, g'h' de plus grandes distances, disposées alternativement; enfin on joindra par des droites les points B et q, q et h, h' et q'. Nous établirons d'abord que la figure ACDh'q'hqB est le développement de la surface des distances.

On sait déjà que AC est le développement de la base de cette surface, et que les plans de distances moyennes coupent à la fois les deux surfaces des distances, qu'ils partagent en quatre parties, symmétriques par rapport à l'une, égales par rapport à l'autre. Par construction, les lignes mn, m'n', m''n'' et AB, CD partagent le développement ABDC de la surface des distances moyennes en quatre parties égales: ces lignes sont donc le développement des quatre intersections des deux surfaces des distances.

Si l'on conçoit que l'une des lignes d'intersection devenue mobile, AB par exemple, parcoure tous les points de AC sans cesser de lui être perpendiculaire, et acquiert en même tems les différentes valeurs comprises entre celles des lignes de moyennes et de moindres distances AB et pq, puis, entre les lignes de moindres et de plus grandes distances pq et gh etc., la seconde des extrémités de la ligne mobile tracera sur le plan la ligne brisée Bqhq'hD.

Il s'agit de démontrer que les valeurs successives de la ligne mobile qui trace sur le plan la figure ACDh'g'hgB, et celles de la génératrice de la surface des distances sont égales, et se succèdent dans le même ordre.

Ces valeurs sont égales, puisque, de part et d'autre, elles reçoivent successivement toutes celles qui sont comprises entre les mêmes limites, savoir les lignes de moindre et de plus grande distance. Elles se succèdent de part et d'autre dans le même ordre; car les parties aliquotes du développement AC, de la base de la surface des distances, correspondent évidemment aux mêmes parties aliquotes de cette base; en sorte que, par exemple, les deux positions de la ligne mobile, que sépareroit un intervalle égal au quart de AC, seroient les développemens des lignes de distances, contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux.

La ligne brisée Bqhq'h'D, qui sert de limite aux diverses grandeurs de la ligne mobile parallèle à AB, est donc le développement de la directrice de la surface des distances; et, par conséquent, la figure ACDh'q'hqB est en effet celui de cette surface elle même.

Il reste à prouver qu'il y a égalité d'étendue entre le parallèlogramme ABCD et la figure ACDh'q'hqB; c'est-à-dire entre les développemens des deux surfaces des distances. Cette égalité résulte de celle qui existe entre les triangles semblables Bqn, nh'n' etc.; et celle-ci est tellement évidente qu'il seroit inutile de nous arrêter à la demontrer.

6. La considération du développement des surfaces des distances nous offre, en même tems qu'un point de vue nouveau des trois propositions établies (§. 2. No. 1. et 2.), une manière également nouvelle d'en prouver la légitimité.

Ces propositions peuvent maintenant être exprimées comme il suit: Première proposition. Quelle que soit d'ailleurs la position de deux lignes de distances, si, dans le développement de la surface des distances, l'intervalle qui sépare ces lignes est égal à celui qui sépare les lignes de principales distances, leur somme sera la même; et, par conséquent, cette somme sera égale à c'elle des lignes de principales distances. Cette proposition est de toute évidence; car si on conçoit que le système des lignes de principales distances se meut en parcourant tous les points de AC et, par conséquent aussi, tous ceux Bqnh etc., il est visible que dans une quelconque des positions de ce système, l'accroissement obtenu par une des lignes qui le composent sera égal à la diminution que l'autre aura éprouvée.

Seconde proposition. Les lignes de distances moyennes partagent le développement de la surface des distances en quatre parties.

Chaque ligne de distance comprise dans une de ces parties excède la ligne de distance moyenne.

Chaque ligne de distance comprise dans la partie contigue sera moindre que la distance moyenne; et la différence sera la même que l'excès dans la première partie.

L'inspection de la figure 1, suffit à la démonstration de cette proposition,

Troisième proposition. Il existe, en général, quatre lignes de distances égales entr'elles; mais les lignes de distances principales sont au nombre de deux.

Il est clair, en effet, que les deux parallèles à pq, terminées, d'une part à AC, de l'autre à la ligne brisée Bq etc., et les deux parallèles à p'q' comprises entre les mêmes limites, si elles sont menées à égale distance de pq, pour les unes, de p'q' pour les autres, seront égales; il y a donc quatre pareilles lignes, mais, si la distance entre pq et ses parallèles, et de même entre p'q' et ses parallèles, est nulle, elles se confondront avec pq pour les unes, avec p'q' pour les autres; le lignes de distances principales seront donc au nombre de deux seulement.

Le développement des surfaces des distances montre encore comment il arrive que l'idée de la quantité de courbure qui, dans le cas linéaire, est inséparable de celle de la figure, en est distincte à l'égard des surfaces; car la ligne de distance étant déterminée de grandeur et de position, elle doit rester la même tant que la courbure ne change pas, et elle ne peut convenir par conséquent, qu'à une seule courbe. Mais l'étendue de la surface des distances peut être déterminée sans que la forme de cette surface soit fixée; en sorte que des figures différentes de la surface donnée accompagneront pourtant la même surface des distances moyennes.

7. Si la considération des courbures moyennes mérite quelqu'attention, c'est surtout à cause du jour qu'elle doit répandre sur les questions où la courbure des surfaces joue le rôle d'une quantité dynamique. Peutêtre même seroit il impossible de se rendre un compte satisfaisant d'une question de ce genre, embrassée dans toute sa généralité, si on ne connoissoit ni la loi de la repartition de la courbure autour d'un point donné, ni l'existence des courbures moyennes, qui se lie à celle de cette loi.

Déjà (§. 2. No. 5.) nous avons eu occasion de faire remarquer un accord frappant entre la composition des forces et la manière dont la courbure est répartie; ce qu'on vient de dire touchant la courbure moyenne rend cet accord plus frappant encore.

Ainsi, si les forces qui agissent sur un des points de la surface sont proportionnelles à sa courbure, elles sont reparties dans tout le contour de ce point; car la courbure elle même est distribuée dans le contour entier. Le nombre de ces forces est infini, chacune d'elles est infiniment petite, et elle est proportionnelle à la ligne de distance contenue dans le plan de sa direction.

Quand on cherche à se représenter l'action des forces dues à la courbure, la considération des surfaces des distances convient parfaitement. Et, en effet, les surfaces des distances sont terminées, d'une part au plan tangent et de l'autre à la surface donnée, sur laquelle elles s'appuyent dans tous les points de leurs directrices. Si on concoit que ces surfaces, devenues solides, continuent à être interposées entre la surface donnée et son plan tangent, elles pourront être regardées comme l'obstacle qui empèche les points des directrices, c'est-à-dire, les points qui environnent celui de tangence, de s'approcher de ce plan. Les différens points dont se composent les surfaces des distances, ainsi interposées, étant doués de forces égales, l'étendue de ces surfaces représentera fidèlement les forces dues à la distance entre les directrices et le plan tangent, c'est-à-dire qu'elle représentera l'action des forces nées de la courbure de la surface donnée. Et par ce que la surface des distances moyennes a la même étendue que la surface des distances qui dépend de la figure de la surface donnée, on en conclura que l'action des forces nées de la courbure seroit encore la même, si la figure étoit sphérique.

Lorsque, au lieu de considérer à la fois le nombre infini des forces qui agissent autour d'un des points de la surface, on se borne à chercher les résultantes de ces forces, on trouve qu'elles sont proportionnelles aux lignes des distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux.

L'action exercée devant être indépendante de la manière dont les forces qui l'exercent sont reparties autour du point donné, quelles que soient les différences entre les lignes de distances qui représentent les résultantes de ces forces, l'action sera toujours égale à celle qui seroit due à une repartition uniforme des mêmes forces.

Dans cette manière d'envisager les choses, nous nous trouvons ramenés à ce que nous savons déjà sur l'accord entre le principe de la composition des forces et la loi de répartition de la courbure autour d'un point donné. Il est clair que les lignes de distances auxquelles les composantes des forces sont proportionnelles représentent maintenant, non plus des quantités infiniment petites, comme lorsqu'on considéroit à la fois chacune des forces qui agissent autour du point donné, mais des quantités finies résultantes de la somme de celles-ci, qui sont en nombre infini.

Dans la démonstration rapportée (§. 1. No. 1.), faute d'avoir encore suffisamment refléchi sur cette matière, les deux points de vue qu'on vient d'expliquer avoient été confondus; ainsi, en prenant l'ensemble de toutes les courbures contenues dans les plans normaux, on embrassoit la totalité des forces infiniment petites reparties autour du point donné, tandis que la somme des courbures principales représentoit celle des composantes des mêmes forces. Au reste, quelle que soit la manière dont on veut envisager ces forcs, il est également nécessaire de distinguer l'idée de la figure de celle de la quantité de courbure qui appartient à la surface.

Ainsi, en embrassant l'ensemble des forces, on trouve que la courbure uniforme de la sphère de courbure moyenne équivaut à toute autre disposition dans laquelle la condition de l'uniformité ne seroit plus observée.

Si, conformément au principe de la composition des forces, on prend pour mesure de celles qui agissent sur un des points de la surface la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux, et qu'on veuille cependant ne pas distinguer la figure de la quantité de courbure, repartie autour du point choisi sur la surface: alors, en admettant qu'il y ait des forces proportionnelles à la courbure, on est conduit à dire, chose absurde, que la figure d'une sur-

face se réduit à deux courbes linéaires et que ces courbes peuvent être remplacées par une infinité d'autres courbes de figures différentes.

Il est évident que la considération des surfaces des distances et celle de leurs développemens dérivent de la comparaison entre la courbure de la surface donnée et celle d'une certaine sphère. Nous dirons donc que, s'il est certain, dans le sens du passage d'Euler rapporté §. 1. No. 1., qu',,on ne sauroit même comparer la courbure des surfaces avec celle d'une sphère," il ne l'est pas moins, dans le sens qui a été expliqué, que l'idée complète de la manière dont la courbure est distribuée autour du point donné, aussi bien que la connoissance de la distance moyenne entre les points de la surface qui environnent le point de tangence et le plan tangent, résulte de la comparaison de la courbure de la surface à celle de la sphère de moyenne courbure.

Je m'étonnois qu'on n'eût pas encore cherché à tirer parti de la comparaison entre la courbure uniforme de la sphère et celle qui présente toute autre figure de la surface, lorsque j'ai eu connoissance d'un mémoire publié récemment par Mr. Gauſs, dans lequel, embrassant cette comparaison sous un point de vue purement géométrique, l'illustre auteur compare les courbes tracées sur les superficies courbes à celles qui seroient ménées sur la surface de la sphère. Je n'ai pu faire qu'une lecture rapide de ce travail. Je le regrette d'autant plus que, malgré l'extrème différence entre l'idée première de Mr. Gauſs et celle qui a amené les recherches qu'on vient de lire, il m'a paru, que des résultats semblables à ceux que j'ai obtenu pouvoient, dans certains cas, être tirés des formules de l'auteur, et qu'assurement un pareil accord, si j'étois à même d'en établir la réalité, seroit une puissante recommendation en faveur de mes propres recherches.

8. La considération des courbures moyennes est nécessairement applicable à toutes les questions où la courbure des surfaces joue le rôle d'une puissance; mais le but, que nous nous sommes proposé n'est pas de traiter ces questions; nous nous bornerons donc, à l'égard des applications, à un petit nombre de remarques.

L'équation des surfaces élastiques ayant été l'occasion de nos recherches, il est à propos de faire observer d'abord que, pour justifier l'hypothèse qui a servi à trouver, la première fois, l'équation de ces surfaces, Crelle's Journal d. M. VII. Bd. 1. Hft. il suffiroit de répéter les diverses propositions qui ont été démontrées, en y joignant la désignation de ce genre de surfaces.

La simplicité de description et le petit nombre des figures différentes de la surface qui peuvent convenir à la construction des voûtes ont sans doute masqué aux yeux des géomètres, qui se sont occupés de cette matière, la nécessité de savoir exprimer d'une manière générale les résistences nées de la courbure des surfaces. La notion des courbures moyennes ne sauroit cependant demeurer étrangère à de telles recherches. Supposons, par exemple, qu'on veuille comparer les voûtes en dômes aux voûtes en berceaux: ne sera-til pas de la plus grande utilité de savoir aussi comparer les deux genres de courbures employées?

Nous terminerons ces reflexions en présentant l'exemple de deux surfaces de figures différentes qui possédent, en même tems qu'une étendue égale, la même courbure moyenne dans tous leurs points.

Les deux surfaces dont nous voulons parler sont celle du cylindre circonscrit et la quatrième partie de la surface sphérique décrite du rayon double de celui de la sphère inscrite. Ces deux surfaces sont d'une étendue égale; puisque le cylindre et la sphère inscrite sont égaux en surface, et que celle des sphères est en raison du quarré de leurs rayons. De plus, ces mêmes surfaces ont dans tous leurs points la même courbure moyenne: car, d'après ce qui précède, la sphère dont le rayon est double de celui de la base de la surface cylindrique n'est autre chose que la sphère de moyenne courbure de cette surface.

§. 4.

Examen du cas où les deux rayons de courbures principales ne sont pas dirigés du même côté.

1. La surface sphérique, d'une part, et, de l'autre, la surface dont les rayons de principales courbures sont égaux mais de signes opposés, comprennent entr'elles toutes les figures possibles de la surface courbe.

Dans ce qui prècède, on s'est uniquement occupé du cas où les deux rayons de courbures principales sont dirigés du même coté; et, pour plus de simplicité, on a supposé que, quel que soit le changement des figures, la somme des courbures principales, représentée ici par celle des lignes de principales distances, est toujours la même.

Après avoir également supposé, à l'égard des surfaces dont les rayons de principales courbures sont dirigés dans des sens opposés, que, abstraction faite du signe, la somme des lignes de principales distances demeure toujours la même, nous examinerons ce qui deviennent alors et la surface des distances moyennes et la loi de répartition de la courbure autour d'un point choisi sur la surface.

Il faut d'abord se rappeler qu' AC est le développement des bases des deux surfaces des distances; que ces bases sont contenus dans le plan tangent; et que, par conséquent, AC représente la position de ce plan.

Cela posé, on verra aisément que, pour toutes les figures de la surface comprises entre la forme cylindrique et celle de la surface dont les rayons de courbures principales, et, par conséquent, aussi les lignes de distances principales sont égaux et de signes contraires, les angles en q et q', h et h' demeurent les mêmes (Fig. 2. 3. et 4.).

La valeur de ces angles dépend, en effet, uniquement et de l'intervalle pq, invariable, puisque, par construction, il est, dans tous les cas possibles, la quatrième partie de AC, et de la somme des deux lignes pq, gh, qui, ainsi qu'on vient de le dire, est également invariable.

Lorsque les deux rayons de courbures principales sont dirigés en sens opposé, la ligne brisée Bqha, et dès-lors aussi la directrice de la surface des distances, dont cette ligne est le développement, est donc indépendante du rapport entre les deux rayons de courbures, et, par conséquent, elle est, dans tous les cas, celle qui convient à la surface cylindrique (Fig. 2.), limite commune entre ce genre de surfaces et celles dont les rayons de courbures sont dirigés du même côté. Les différences entre ces diverses surfaces consistent seulement en ce que des parties plus ou moins grandes de la directrice se trouvent placées au dessus du plan tangent.

On se représentera les conséquences de la transformation par laquelle la surface passeroit de la forme cylindrique à celle où les rayons de principales courbures sont égaux mais de signes contraires, si on conçoit que la ligne AC (Fig. 2.) se meuve parallèlement à elle même, en se rapprochant graduellement de BD (Fig. 3.), jusqu'à ce que ces deux lignes se confondent (Fig. 4.). En effet, durant ce mouvement, la ligne pqde principale distance située au dessus du plan tangent, ligne qui étoit nulle à l'égard de la surface cylindrique, augmentera par degrés, en même tems que gh diminuera de quantités égales, jusqu'à ce qu'enfin ces deux lignes, terminées aux côtés opposés de AC, deviennent égales.

En passant de la surface sphérique à la surface cylindrique par le nombre infini des configurations qui les séparent, la ligne brisée Bqh etc., et, par conséquent, aussi la directrice de la surface des distances, dont cette ligne est le développement, change de forme autant de fois; mais au milieu de tous ces changemens, la surface des moyennes distances n'en subit aucun.

Ces changemens, d'une part, et cette invariabilité, de l'autre, résultent de ce que nous avons dit touchant le nombre infini des figures de la surface auxquelles appartient une même courbure moyenne, ou, en d'autres termes, une même quantité dynamique de courbure.

Le contraire arrive quand on passe de la surface cylindrique à celle dont les rayons de courbures principales sont égaux, mais de signes contraires. La directrice de la surface des distances conserve la même forme; mais une partie de cette courbe passe de l'autre côté du plan tangent, et, par conséquent, la surface des distances moyennes diminue graduellement, jusqu'à ce qu'elle l'anéantisse, lorsque les lignes de distances terminées à une des faces du plan tangent sont égales aux lignes de distances terminées à l'autre face du même plan.

On conçoit, en effet, que, ne pouvant attribuer à une force deux directions contraires, celle qui résulte de la courbure ne peut présentément dépendre que de la différence entre les courbures principales, et que, par conséquent, la surface des distances moyennes, qui ne cesse pas de représenter la quantité dynamique de la courbure, doit s'anéantir lorsque les deux courbures dirigées en sens contraires sont égales. Il nous reste à montrer que, malgré les différences qu'entraîne le changement de direction d'un des rayons de courbures principales, la loi de distribution de la courbure autour d'un des points de la surface ne souffre aucune altération: qu'ainsi il est encore vrai que la somme des lignes de distances contenues dans deux plans normaux perpendiculaires entr'eux est indépendante du choix de ces plans: que la ligne de distance contenue dans les plans moyens est moyenne entre les lignes de distances principales: enfin que, en embrassant le contour entier du point donné, il y a, en général, quatre directions du plan normal pour lesquelles les

lignes de distances sont égales, et que le nombre de ces directions se réduit à deux à l'égard des lignes de principales distances.

Il suffit, en effet, pour étendre ces diverses propositions au cas présent, d'observer que, l'augmentation des lignes de distances situées au dessus de AC étant considérée, à raison du signe, comme une diminution, les diverses lignes de distances dont la comparaison sert à établir, dans le cas des surfaces cylindriques, les propositions dont il s'agit, éprouvent à la fois des diminutions proportionnelles; en sorte que, leur grandeur relative ne changeant pas, les mêmes raisonnemens subsistent. A l'égard de la surface cylindrique, on peut remarquer (Fig. 2.) que deux points seulement du développement de la directrice de la surface de distances, savoir q et q', tombant sur AC, une des courbures principa-Quand les deux rayons de courbures principales sont de signes opposées (Fig. 3.), quatre points du développement de la directrice, savoir v et t, v' et t', tombant sur AC, ni l'une ni l'autre des courbures principales ne sont nulles; mais, de même qu'à l'égard des surfaces cylindriques, la sphère dont le rayon est infini est au nombre de celles qui ont leur centre sur la normale au point donné.

Dans le cas où les deux rayons de courbures principales sont égaux et de signes contraires, (Fig. 4.) les points en v et u, v' et u' se confondent avec ceux en B, n, et n', n'', lesquels partagent BD en quatre parties égales. La sphère dont le rayon est infini est donc alors celle de moyenne courbure, et cette sphère se confond avec le plan tangent.