HISTORIA MATHEMATICA **14** (1987), 347–365

Mécanique et théorie des surfaces: les travaux de Sophie Germain

Amy Dahan-Dalmédico

CNRS, Paris, France

L'article présente brièvement les travaux de Sophie Germain sur les surfaces élastiques, en centrant l'analyse sur le rôle et la justification de l'hypothèse fondamentale qu'elle a faite par analogie avec les travaux d'Euler sur les tiges. Cette hypothèse postule que la force élastique en un point d'une surface, qui contrebalance l'effet des forces extérieures appliquées, est proportionnelle à la somme des courbures principales de la surface en ce point. L'article décrit de quelle intuition procède cette hypothèse qui va conduire Sophie Germain à définir un domaine mixte entre la géométrie et la mécanique, dans lequel les notions de "courbure moyenne," de "sphère moyenne," et de "surface des distances" répondent aux besoins de mathématisation de la notion de forme d'une surface. L'article indique les limites de cette théorie au regard de celle, contemporaine, de Gauss. © 1987 Academic Press, Inc.

Der Aufsatz stellt kurz die Arbeiten von Sophie Germain über elastische Oberflächen vor. Schwerpunktartig wird die Rolle und die Rechtfertigung der grundlegenden Hypothese analysiert, die sie in Analogie zu den Arbeiten von Euler über Gestänge angenommen hat. Diese Hypothese fordert, daß die elastische Kraft in einem Oberflächenpunkt, die die Wirkung der äußerlich aufgewandten Kräfte aufwiegt, der Summe der Hauptkrümmungen der Oberfläche in diesem Punkt proportional ist. Der Aufsatz beschreibt die Intuition, von der diese Hypothese ausgeht, die S. Germain veranlaßt, ein "Mischgebiet" zwischen Geometrie und Mechanik zu definieren. In diesem Gebiet entsprechen die Begriffe der "mittleren Krümmung," der "mittleren Kugel," und der "Oberfläche von Abständen" den Erfordernissen der Mathematisierung des Begriffs der Gestalt einer Oberfläche. Der Aufsatz zeigt die Grenzen dieser Theorie im Vergleich zur gleichzeitigen Theorie von Gauss auf. © 1987 Academic Press, Inc.

This article sketches Sophie Germain's works on elastic surfaces, focusing on the role and justification of the fundamental hypothesis she made along the line of Euler's studies of sticks. This hypothesis posits that at one point of a surface, the elastic force which counterbalances the external forces is proportional to the sum of the principal curvatures of the surface at this point. This article describes the intuitive thought processes in which this hypothesis took root. Working with her premise, Sophie Germain defined a new domain drawing from geometry and mechanics, in which the idea of mean curvature, mean sphere, and the surface of distances allow a mathematical approach to the description of the sphere of a surface. The limits of this theory are examined in terms of Gauss' theory of the same period. © 1987 Academic Press, Inc.

AMS 1980 subject classifications: 01A50, 53-03, 70-3.

Key Words: differential geometry, curvature of surfaces, L. Euler, J.-B. Meusnier, elastic force, mechanics, elastic surface, mean sphere, surface of mean distances, C. F. Gauss.

0315-0860/87 $3.00

1. INTRODUCTION

Dès le XVIIIème siècle, les travaux de mécanique et d'étude de vibration des corps élastiques (lignes élastiques, bandes élastiques, lames minces . . .) ont été à l'origine de certains progrès conceptuels de la géométrie différentielle.

Ainsi Jacques Bernoulli, dans ses travaux sur l'élastica [Bernoulli 1705], étudie le mouvement d'une bande mince soumise en une de ses extrémités, à un poids qui provoque une déformation. Il veut obtenir la nouvelle forme courbée de la bande pour laquelle s'effectue l'équilibre entre le moment du poids appliqué et la "force d'élasticité" qui résulte de la déformation. Pour cela, Jacques Bernoulli utilise les propriétés du cercle osculateur d'une courbe et donne l'expression analytique du rayon de courbure d'une courbe en un point.

A partir de cet exemple, nous pouvons distinguer les divers aspects du problème qui devront être élucidés séparément afin de prétendre aboutir aux équations différentielles qui donnent le mouvement d'un point quelconque d'un corps élastique, en fonction de sa position initiale, sa position dans le corps, les forces extérieures appliquées, et éventuellement le temps dans le cas où un état vibratoire s'installe. Ces aspects sont:

—L'aspect mécanique: quelles lois ou quels principes de la mécanique faut-il utiliser (analyse des forces, des moments etc.)?

—L'aspect proprement élastique: qu'est-ce qu'une "force élastique," de quoi dépend-elle, faut-il la faire intervenir, avec les forces extérieures, comme une force de caractère vectoriel ou comme un moment (cet aspect est lié évidemment à l'aspect mécanique) [1]?

—L'aspect géométrique: un corps élastique est soumis à des *déformations* dont il va falloir rendre compte analytiquement [2].

Indiquons d'emblée que c'est ce dernier aspect que nous privilégions dans cet article mais nous verrons qu'il n'est pas indépendant du précédent.

Euler devait obtenir de nouveaux résultats sur le sujet des courbes et unifier la théorie des courbes élastiques dans un élégant traité "Addition sur les Courbes Elastiques" publié en appendice à un ouvrage fondamental sur le calcul de variations [Euler 1744].

Par ailleurs Euler, dans sa *Mécanique* de 1736, montre que des masses ponctuelles sur une surface, non soumises à des forces autres que gravitationnelles, suivent les géodésiques de la surface et il poursuit ainsi l'étude des géodésiques, déjà amorcée par les Bernoulli.

Mais la géométrie, tant analytique que différentielle, des surfaces reste peu développée au XVIIIème siècle, en particulier dans les grands traités d'Euler.

Mentionnons néanmoins son mémoire sur la courbure des surfaces [Euler 1760], qui revêt une importance capitale pour l'histoire de la géométrie différentielle et aussi pour les travaux de Sophie Germain.

Dès l'introduction, Euler y expose son plan:

—déterminer le rayon osculateur d'une section plane quelconque de la surface.

—appliquer cette solution aux sections normales en un point à la surface (c'est-à-dire les sections planes perpendiculaires au plan tangent en ce point),

—comparer entre eux les rayons osculateurs de toutes ces sections normales par rapport à leur inclinaison mutelle,

plan qu'il suit fidèlement.

Euler obtient deux expressions équivalentes pour le rayon de courbure d'une section normale quelconque:

$$r = \frac{1}{L + M\cos 2\phi} = \frac{2fg}{f + g - (f - g)\cos 2\phi}$$

où L et M sont des constantes; f et g sont les rayons de courbure extrémaux parmi tous les rayons de courbure des sections normales; ces sections seront dites principales; ϕ est l'angle du plan de la section normale considérée avec la plan d'une des sections principales.

Euler met ainsi en évidence la relation entre le rayon de courbure d'une section normale quelconque et les rayons de courbure principaux, qui s'exprime aussi par:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cos^2\phi}{f} + \frac{\sin^2\phi}{g}.$$

Il montre aussi d'ailleurs que la connaissance de trois rayons de courbure de sections normales permet de trouver les sections principales et leurs rayons associés, c'est-à-dire de trouver tous les éléments permettant d'appliquer la formule générale.

Euler obtient pour deux sections normales, perpendiculaires entre elles, les relations:

$$\frac{1}{r} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2\phi}{2fg}$$

et

$$\frac{1}{r'} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(\phi + \pi/2)}{2fg}$$

d'où il vient:

$$1/r + 1/r' = 1/f + 1/g$$

résultat qui va jouer un grand rôle ultérieurement.

Mais dans les années suivantes, quand Euler ou Jacques II Bernoulli s'intéressent soit aux tiges courbées (1760, 1774), soit à la vibration des plaques, des cloches, ou des tambours (1787), leurs mémoires sont partiellement erronés, principalement pour des raisons d'insuffisance du développement de la géométrie différentielle: les principes mécaniques d'Euler sont corrects et correctement appliqués, mais il y manque la description différentielle de nombreux éléments d'une courbe (qui peut être gauche) et d'une surface.

Dans un mémoire rédigé en 1776 mais qui ne fut publié qu'en 1785 un élève de Monge, Jean-Baptiste Meusnier de la Place (1754–1793), donne une interprétation géométrique nouvelle de l'étude d'Euler sur la courbure des surfaces [Meusnier 1785].

On sait pour une courbe plane donnée, le cercle osculateur en chaque point admet un contact du second ordre avec la courbe en ce point; ce qui veut dire qu'au voisinage du point, et en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, la courbe et son cercle osculateur sont assimilables. On peut dire que Meusnier cherche un analogue à cette propriété, dans le cas des surfaces [3].

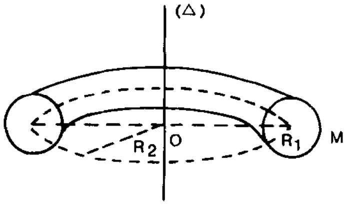
Rappelant les résultats d'Euler sur la courbure des sections principales, Meusnier écrit:

> que l'on peut présenter la question sous un autre point de vue en la faisant dépendre d'une propriété intéressante savoir qu'il existe une génération que convient à tout élément de surface.

Considérons un tore engendré par la rotation d'un cercle de rayon R_1, autour d'un axe (Δ) situé dans son plan et à une distance R_2 de son centre.

On vérifie aisément qu'en un point M du tore (cf. Figure 1) tel que $OM = R_1 + R_2$, les deux rayons principaux de courbure sont égaux à R_1 et $R_1 + R_2$. Ils correspondent aux deux sections normales, définies

—la première par (Δ) et M,
—la seconde par le plan perpendiculaire en M à la première.



A partir de cet exemple, Meusnier établit le résultat suivant: on peut en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, considérer tout élément de surface dans le voisinage d'un point donné, comme engendré par la rotation infiniment petite d'un arc de cercle (situé dans l'une des sections principales, avec pour centre, le centre de courbure principale correspondant) autour d'un axe situé dans le plan du cercle, parallèle au plan tangent de l'élément et passant par l'autre centre de courbure principale.

Le mode de génération considéré par Meusnier revient donc à substituer à la surface dans le voisinage d'un point, un *tore osculateur* particulier dont l'axe est parallèle au plan tangent.

2. LES PREMIERS ESSAIS DE SOPHIE GERMAIN

En 1809, Sophie Germain s'attaque au problème des surfaces élastiques, pour concourir au Grand Prix de l' Académie des Sciences. Elle devait présenter trois mémoires successifs en 1811, 1813, 1815 [4]. Sans entrer ici dans le détail de sa biographie ou de sa formation, il est clair que la vision de la méthodologie mathématique propre à l'explication des phénomènes physiques que Sophie Germain pouvait avoir, venait principalement de la *Mécanique Analytique* de Lagrange (1ère édition en 1788), et de la lecture de quelques mémoires latins d' Euler, péniblement traduits.

Et fondamentalement, elle veut procéder par analogie avec le raisonnement qu' Euler a suivi dans le cas unidimensional des tiges et des lames [Euler 1779]. Pour Euler—et pour Jacques Bernoulli aussi d'ailleurs, dans son mémoire de 1705 que Sophie Germain ignore encore à cette date—les forces internes d' élasticité en un point, qui contrebalancent les forces extérieures appliquées, sont proportionnelles au rayon de courbure de la tige en ce point.

Sophie Germain part d'une équation bidimensionnelle—écrite par analogie avec celle, unidimensionnelle, d' Euler pour les tiges—à propos de laquelle elle écrit, au début du mémoire de 1811 soumis au Prix:

> Je me contente de la donner au commencement de mon mémoire sans entrer dans aucun détail sur la manière dont je l'ai trouvée. . . .
>
> L'équation
>
> $$\int dzdy \int Pds + \int dzdx \int Qds - 2\int dxdy \int Rds = V[1/r + 1/r']$$
>
> que je propose comme étant celle de l'équilibre de la surface vibrante élastique suppose que pour un point quelconque de cette surface, on ait établi trois coordonnées orthogonales, savoir x, y, z, de sorte que l'élément soit exprimé suivant l'usage par l'équation
>
> $$ds = dxdy[1 + (\partial_x z)^2 + (\partial_y z)^2]^{1/2},$$
>
> la masse de cet élément le sera alors par $\int ds$. [Bucciarelli & Dworski 1980, 57]

Le membre de gauche est censé représenter l'effet des forces extérieures appliquées, dont les composantes sur les trois axes orthogonaux sont P, Q, R. Dans le membre de droite qui représente la force élastique, V est une constante d'élasticité liée à la nature du matériau, élasticité supposée uniforme dans tous les sens; et l'expression $(1/r + 1/r')$ est ici la somme des courbures principales.

Puis elle fait comme Euler plusieurs hypothèses simplificatrices sur les déplacements et rotations de la plaque et obtient une équation différentielle du sixième ordre (fausse) dont elle cherche les solutions sous forme de séries trigonométriques.

Ce que Sophie Germain appellera toujours "*mon hypothèse*" faite par analogie avec ce qu'elle a compris d'Euler, est le fait que la *force élastique est proportionnelle à la somme des courbures principales.*

En fait plusieurs points sont très contestables dans son mémoire qui dans l'ensemble est erroné; en particulier l'équation de départ est sans réelle signification. De plus le traitement mathématique présente de nombreuses insuffisances et la notion de force élastique elle-même est très floue. S'y trouvent confondues la notion eulérienne de *force* élastique, et la notion lagrangienne de *moment* élastique—aujourd'hui appelé travail—quantité scalaire, soumise aux méthodes variationnelles de la *Mécanique Analytique* [5].

Mais concentrons nous sur l'hypothèse elle-même. L'idée de faire jouer, dans le cadre de la théorie des surfaces, à la somme des courbures principales, le même rôle que la courbure de la ligne élastique dans la théoire des verges, est originale; et nous préciserons ci-dessous de quelles intuitions procède cette hypothèse.

Justifier, démontrer (si cela est possible) son hypothèse, sera la préoccupation constante de Sophie Germain; soumise aux critiques des membres de la communauté scientifique, elle considérera toujours que ces critiques visent surtout cette hypothèse, ce qui n'était pas forcément le cas. Par exemple Lagrange [1812/1829], obtiendra l'équation correcte de vibration des plaques à partir de son hypothèse, mais en y adjoignant des conditions aux bords adéquates, et en corrigeant l'analyse mathématique [6].

Dans le mémoire de 1811, elle se contente d'indiquer que si elle a retenu l'expression $1/r + 1/r'$, c'est que pour de petites vibrations, les termes en $1/rr'$ ou en d'autres fonctions des courbures principales sont négligeables par rapport à leur somme.

Dans le mémoire remis en 1813 pour le deuxième concours, Sophie Germain cherche à justifier son hypothèse par des considérations géométriques sur la déformation d'un plan auquel quatre points appartiennent initialement. Elle choisit des points ayant pour coordonnées respectives:

$$\begin{aligned}&x,\ y,\ z\\&x,\ y + dy,\ z + dz\\&x + dx,\ y,\ z + dz\\&x + dx,\ y + dy,\ z + 2dz + d^2z.\end{aligned}$$

Ici aussi S. Germain cherche à étendre par analogie le principe utilisé par Euler pour une simple courbe, et imaginé encore par Jacques Bernoulli pour l'elastica, principe qui stipule que la force d'élasticité résulte de la *résistance*, que les éléments successifs de la tige opposent à être fléchis les uns sur les autres et à changer leur angle de contingence actuel (principe repris aussi par Lagrange). Mais comment exprimer cette condition pour une surface où la flexion peut avoir lieu en tous sens? Quel est l'analogue de l'angle de contingence?

Elle cherche à calculer l'angle déterminé par les plans passant respectivement par les premier, deuxième et quatrième points et les premier, troisième, et quatrième points. Cette tentative est très critiquée par Legendre [Germain 1879, 340] [7], qui lui écrit:

> Lagrange a eu raison de considérer deux éléments consécutifs dans la courbe élastique, et de mesurer l'élasticité par l'angle compris entre les deux éléments. On n'a pas d'éléments analogues dans les surfaces, ou du moins ceux que nous avons considérés ne sont pas dans le signe de l'analogie. Un élément de la surface a pour projection *dxdy*, l'élément suivant a pour projection

$$(dx + ddx)(dy + ddy);$$

ces deux projections font deux carrés séparés. Ensuite l'étude des plans ne s'accomode pas avec ces projections, parce qu'un plan, ne passe pas par quatre points. Il y a dans tout cela beaucoup d'obscurité.

On le voit: ce qui fait ici cruellement défaut à Sophie Germain est bien une théorie géométrique des surfaces.

3. L'INTERVENTION DE POISSON

Le premier Août 1814, Poisson lit devant la première classe de l' Institut un "Mémoire sur les Surfaces Elastiques" [Poisson 1814b] dans lequel il déclare d'emblée que son but est de parvenir *sans aucune hypothèse* aux équations d'équilibre des surfaces élastiques, faisant ainsi référence au mémoire anonyme ayant obtenu une mention honorable l'année précédente.

Récapitulant en scientifique professionnel tous les travaux antérieurs du XVIIIème siècle sur le sujet, Poisson les ramène à deux démarches: soit on considère le corps dont on étudie les vibrations comme une somme de lignes indivisibles simples (c'est le cas d'Euler dans ses travaux sur les cloches), soit on le considère comme composé de deux systèmes de lignes perpendiculaires et qui vibrent comme s'ils étaient collés l'un à l'autre et sans se gêner mutuellement (Euler pour les tambours, Jacques II Bernoulli en 1787 sur les plaques).

Poisson veut rompre à tout prix avec ces méthodes de décomposition géométrique de la surface dont on étudie les vibrations.

Il se refuse à exprimer la réaction de la surface par les réactions partielles des courbes dont elle est composée; en 1814 ce n'est donc pas tant les méthodes lagrangiennes de la *Mécanique Analytique* que Poisson récuse principalement—alors que ce cera nettement le cas en 1828 dans sa polémique avec Navier—que la tradition proprement géométrique de la mécanique eulérienne [8].

On sait évidemment que Poisson devait adopter le modèle moléculaire et chercher à déduire l'équation de la plaque à partir de l'équilibre d'une *seule* molécule de la surface.

Sophie Germain, elle, a tenté de poursuivre la tradition eulérienne, en la fécondant par les méthodes variationnelles de Lagrange mais il lui manquait la maîtrise de tous les instruments techniques et conceptuels.

Dans la *Correspondance de l'Ecole Polytechnique*, Poisson [1816] indique qu'une autre hypothèse, par exemple que la *force élastique soit proportionnelle à la différence des courbures principales*, déterminerait la même équation différentielle. En fait dans la version complète du mémoire publié [Poisson 1814b], il argumente même que l'application de la méthode variationnelle de Lagrange à *n'importe quelle* expression de la forme

$$(1/r + 1/r')^2 \pm C(1/r)(1/r')$$

où C est une constante arbitraire, donne l'équation de vibration de la plaque. C'est pourquoi Poisson accordait si peu de crédit à l'hypothèse de Sophie Germain [Bucciarelli & Dworski 1980, 65, 71–85].

D'ailleurs un aspect intéressant de l'approche variationnelle du problème de la courbure des plaques est que si on suppose, comme Sophie Germain, que la force est proportionnelle à $V(1/r + 1/r')$, on peut obtenir, comme Lagrange l'a fait, l'équation correcte du mouvement des points intérieurs, mais certaines des équations déterminant le comportement des bords de la plaque sont erronées. C'est Kirchhoff qui devait élucider cette question en 1850: mais outre des techniques variationnelles délicates, sa méthode recquiert impérativement la notion d'invariant d'une surface courbe, c'est-à-dire le mémoire de Gauss de 1827.

4. L'IDÉE DE SOMMER TOUTES LES COURBURES POSSIBLES

Dans le troisième mémoire de 1815, Sophie Germain qui a acquis une confiance croissante dans son hypothèse veut lui donner un statut de théorème, déduit logiquement à partir d'un postulat méthodologique qui lui semble incontestable.

Ce postulat est le suivant: *l'effet est proportionnel à la cause qui le produit*; c'est l'argument tant décrié par d'Alembert, dans sa discussion avec Euler sur les principes de la mécanique. Cherchant à défendre son hypothèse, elle écrira:

> Quand il se présente une question toute nouvelle, il est toujours extrêmement difficile d'accréditer un principe qui lui soit spécial. Ici cependant je crois avoir offert les conclusions d'un *raisonnement tellement simple* qu'il ne prête guère à la contestation. Ainsi lorsque je dis qu'une force est proportionnelle à l'effet qu'elle produit ou qu'elle tend à produire, fais-je autre chose que d'exprimer une proposition généralement admise, et qui est d'ailleurs *évidente* d'elle-même? [9]

Ici la situation est à trois termes: une cause extérieure produit une déformation d'une surface et celle—ci est elle—même cause des forces d'élasticité. La relation "évidente" de proportionnalité qui intéresse notre auteur est celle entre la *déformation* de la surface et les forces d'élasticité.

La mathématisation de la notion de forme est directement posée, la déformation étant conçue comme une différence entre deux formes. D'abord noté par un simple symbole littéral—I pour la forme initiale, E pour la forme finale, élastique—ce symbole ne devient mathématiquement opératoire qu'avec la notion de courbure, avec laquelle il s'identifie dans le cas de la tige, puisque le rayon du cercle osculateur (et donc son inverse) *mesure* en quelque sorte la déformation par rapport à la forme rectiligne initiale.

Mais une surface élastique déformée présente une multitude de courbes possibles en chaque point, qui sont les sections de la surface suivant tous les plans passant par ce point.

Sophie Germain postule qu'en considérant la *somme* de toutes les courbures relatives à toutes les courbes produites par les différentes sections planes de la surface, on obtiendra une expression qui mathématisera la notion de forme de la surface en ce point.

Elle propose donc implicitement une procédure *intégrale* pour rendre compte de la courbure d'une surface. Y coucourent deux raisonnements qui procèdent de deux intuitions distinctes:

—L'une est mathématique; une surface est la somme de ses lignes au sens du calcul des indivisibles puis du calcul intégral.

—L'autre est plus proprement physique; quand on étudie un solide élastique d'épaisseur petite par rapport à ses autres dimensions, Sophie Germain écrira qu'il

> est permis de considérer ce solide comme partagé en un nombre infini de couches infiniment minces, qui affecteraient toutes durant le mouvement des figures semblables aux figures que les diverses couches réellement séparées prendraient, si toutes choses égales d'ailleurs, elles étaient ébranlées isolément. . . . [Germain 1828]

L'approche est donc voisine de celle d' Euler ou de celle de Jacques II Bernoulli, celles que réprouvait précisément Poisson.

Dans son troisième mémoire de 1815, S. Germain indique que cette *somme* de toutes les courbures se réduit à deux termes qui sont les courbures principales, c'est-à-dire les courbures maximale et minimale parmi toutes les courbures relatives aux sections normales en un point donné. En fait elle expose beaucoup plus clairement comment elle est arrivée à ce résultat dans son mémoire de 1831.

Euler pensait déjà qu'on pouvait, pour étudier les propriétés de courbure d'une surface, mettre à l'écart les sections obliques; de plus le résultat de Meusnier publié en 1785, établit que la courbure d'une section oblique renferme le cosinus de l'angle d'inclinaison.

En prenant alors, pour chacune des positions d'un plan normal, la *somme* de toutes les courbures de toutes les sections inclinées, chaque valeur du cosinus intervient deux fois avec des signes opposés; et dans une intégration de 0 à π par rapport à l'angle d'inclinaison, le résultat est nul. Il était donc bien légitime de ne s'occuper que des sections normales. Pour sommer ensuite les courbures relatives aux sections normales, Sophie Germain utilise les résultats d'Euler, rappelés dans notre introduction,

$$\frac{1}{r} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2\phi}{2fg}$$

et

$$\frac{1}{r'} = \frac{f + g - (f - g)\cos 2(\phi + \pi/2)}{2fg}$$

d'où il vient:

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{g}.$$

C'est sans doute cette dernière propriété, bien connue, qui lui a suggéré l'idée de son "hypothèse."

En effet de cette formule, elle conclut:

> Ainsi la somme des raisons inverses des rayons de courbure de toutes les courbes produites par les différentes sections de la surface se réduit à la somme des raisons inverses des deux rayons de principales courbures de la même surface, prise une infinité de fois. L'idée de l'infini ne se présente ici qu'à raison de la répétition d'une seule et même mesure, qui est en effet celle de la courbure de la surface. [Germain 1821,6]

Cette dernière phrase traduit le procédé intégral simple

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\rho(\varphi)}\,d\varphi + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{1}{\rho(\varphi)}\,d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{1}{\rho\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\rho(\varphi)}\right] d\varphi = \int_{\pi/2}^{\pi} \left[\frac{1}{f} + \frac{1}{g}\right] d\varphi$$

où ρ est le rayon de courbure de la section normale repérée par l'angle ϕ qu'elle fait avec la section déterminant la courbure maximum.

Ainsi Sophie Germain aboutit au résultat que la somme intégrale de toutes les courbures relatives à toutes les courbes possibles obtenues par intersection des sections planes (passant par un point) avec la surface, est proportionnelle à la somme des courbures principales.

Ce résultat analytique, joint au postulat méthodologique de l'effet proportionnel à la cause, lui semble établir de façon irréfutable la validité de son hypothèse pour la théorie des surfaces élastiques.

5. UN DOMAINE "MIXTE" ENTRE GEOMETRIE ET MECANIQUE

Sophie Germain n'eut pas de véritable interlocuteur scientifique et intellectuel dans la communauté des savants, en dépit de quelques bonnes amitiés comme celle de Legendre et plus tard celle de Fourier.

En l'absence d'une compréhension précise de ses erreurs mathématiques et face aux partisans du modèle moléculaire contre lesquels elle polarise ses efforts, elle ne fait guère de vrais progrès conceptuels; seul son discours devient de plus en plus résolument positiviste, mais ses travaux sont de peu de poids dans le nouveau champ de la théorie de l'élasticité qui s'est ouvert dans les années 1820 avec les travaux de Navier, de Cauchy puis Poisson.

En 1821 elle publie à compte d'auteur [Germain 1821] le mémoire qui a obtenu le grand prix en y ajoutant seulement un nouvel essai de "démonstration" de son hypothèse inspiré par le modèle de celle de Jacques Bernoulli de 1705 pour l'élastica; mémoire que Fourier lui a montré et expliqué. Mais l'application aux plaques, qu'en fait Sophie Germain, est naïve et peu convaincante.

Pourtant dans ses derniers travaux, une nouvelle dialectique entre mathématiques et physique s'amorce.

A propos de la notion de surface élastique, elle écrit:

> Elle est en quelque sorte *mixte* entre celle de la surface géométrique et celle du solide. En effet d'une part la surface géométrique n'ayant aucune existence réelle se refuse à toute idée de mouvement, et de l'autre, les molécules qui composent l'épaisseur du solide ne peuvent être confondues avec celles du solide, qu'en vertu de conditions particulières. . . .

Et elle poursuit:

> Cela posé, nous pouvons donc dire qu'un solide doué d'élasticité et dont l'épaisseur est fort petite par rapport à ses autres dimensions, reçoit le *nom de surface élastique* lorsqu'il est assujetti à cette condition que abstraction faite du temps, chacune des couches dans lesquelles on peut concevoir son épaisseur divisée se comporte, durant le mouvement de ce solide, de la même manière que si elle était isolée. [Germain 1826]

Ainsi Sophie Germain en vient ici à prendre pour *définition* des surfaces élastiques, l'hypothèse qui lui avait servi de modèle quinze ans plus tôt! Sa théorie va alors évidemment s'appliquer à de telles surfaces. Enfin, la justification de l'hypothèse ne se pose plus.

Son "Mémoire sur la courbure des surfaces" [1831] s'inscrit dans ce domaine mixte entre géométrie et physique. Il fut rédigé au cours des évènements de Juillet 1830 à Paris et a pour but d'élaborer une "théorie dynamique de la courbure" et non une théorie purement géométrique des surfaces considérées pour elles-mêmes.

En effet, elle écrit:

> lorsque la courbure entre en comparaison avec des quantités dynamiques, on ne peut se dissimuler qu'elle est tacitement traitée comme une quantité du même genre. Les surfaces ne sont donc plus considérées par rapport à elles seules, et il ne s'agit pas de leurs propriétés particulières ni de celles qui sont communes à une classe d'entr' elles. Ce dont il s'agit alors c'est de définir la *quantité dynamique née de la courbure*. Or cette quantité ne dépend pas de la *figure* des surfaces, mais d'une condition qui est remplie par un nombre infini de surfaces différentes. [Germain 1831, 1]

Ainsi comme S. Germain l'exprime elle-même, sa théorie de la courbure des surfaces contient l'idée d'*invariance*. Idée essentielle au projet même d'une telle théorie car en son absence, chaque surface concrète donnée se distingue radicalement d'une autre, et il est alors impossible d'exhiber des classifications; la théorie est sans objet.

Mais nous allons voir que l'invariance par rapport à la forme concrète des surfaces des outils construits par S. Germain, est directement adaptée au cadre précis de la théorie dynamique des surfaces élastiques; contrairement à l'invariance dans la théorie gaussienne qui est pensée par rapport à des transformations géométriques données, en particulier les isométries sur la surface.

Chemin faisant, Sophie Germain va:

(a) d'une part, donner une *intepprétation géométrique* de l'expression de la force élastique d'une surface déformée, en la mesurant par le rayon d'une certaine sphère.

(b) d'autre part, donner un *contenu physique* à la courbure qu'elle désigne d'ailleurs comme une quantité physique mesurable—*la quantité de courbure*—dont elle se propose d'étudier la loi de répartition.

Nous allons suivre maintenant le mémoire de 1831.

6. LES INSTRUMENTS DE LA THEORIE DYNAMIQUE DE LA COURBURE

(*a*) *Courbure moyenne et sphère moyenne*

Reprenant les résultats d'Euler et la présentation propre qu'elle en avait faite en 1815, Sophie Germain introduit les "plans moyens" qui correspondent aux valeurs $\phi = 45°$, et $\phi = 45° + 90°$ des angles de ces plans avec l'une des sections principales.

Les rayons de courbure des courbes appartenant à ces plans moyens sont alors égaux entre eux et donc à:

$$1/R = (1/2)(1/f + 1/g).$$

Cette courbure, demi-somme des courbures principales, est dite *courbure moyenne*. Il ne s'agit pas seulement, dit-elle, d'une courbure qui serait une moyenne entre les diverses courbures linéaires réparties autour d'un point de la surface. Mais il s'agit vraiment d'une "courbure-moyenne-de-la-surface-elle-même," qui joue un rôle *synthétique* de représentation de la forme de la surface, au moins d'un point de vue mécanique.

C'est pourquoi Sophie Germain définit la *sphère moyenne*: c'est une sphère centrée sur la normale à la surface en un point et dont le rayon est précisément défini par la relation ci-dessus; c'est-à-dire que les grands cercles de cette sphère possèdent comme courbure linéaire, la courbure moyenne.

Remarquons qu'en un point, une surface donnée et sa sphère moyenne ont évidemment même courbure moyenne; pourtant la sphère moyenne ne peut jouer le rôle de *surface osculatrice* à la surface donnée comme le faisait le tore osculateur de Meusnier, le contact entre les deux surfaces n'étant que du premier ordre (c'est à dire qu'elles ont seulement même plan tangent).

L'utilité de cette sphère moyenne va être de *montrer qu'il existe, sous le rapport dynamique, une quantité de courbure indépendante de la figure des surfaces.*

Sophie Germain se restreint dans un premier temps au cas où les deux rayons de courbures principales sont dirigés du même côté de la normale (c.a.d. quand f et g sont de même signe). C'est le cas des surfaces dites concavo–concaves ou bien convexo–convexes, terminologie utilisée par Gauss dans son mémoire de 1827.

Elle tentera d'évoquer dans les dernières pages de son mémoire les autres cas mais en fait le cas des surfaces concavo–convexes (f et g de signes opposés) et notamment celui des surfaces de courbure moyenne nulle (f et g égaux et opposés) ne peut être traité suivant son modèle; or ce dernier cas est fort important, Meusnier ayant montré que de telles surfaces sont solutions de l'équation aux dérivées partielles de Lagrange, caractérisant les surfaces minima.

(*b*) *Surface des distances et surface des distances moyennes*

Sophie Germain rappelle que dans le cas des courbes planes, la première idée pour appréhender la courbure est de comparer la courbe à sa tangente: plus une courbe s'écarte de sa tangente, plus sa courbure est grande et plus, en termes mécaniques, la force qui lui a été appliquée a dû être importante.

Elle définit pour une courbe donnée la *ligne de distance* en un point: c'est la distance entre l'extrémité de l'arc de longueur unité compté sur la courbe à partir du point, et la tangente. (En fait la ligne de distance signifie à la fois le segment perpendiculaire à la tangente ainsi défini, et sa mesure, ce qui est usuel.) On vérifie aisément que la courbure est proportionnelle à la ligne de distance.

Ce point de vue est en un sens proche de celui de Newton par exemple, qui s'intéressant à la trajectoire d'un mobile, la décrit au moyen de la *déflection* de la courbe par rapport à sa tangente.

Puis elle écrit:

> Si nous jugeons qu'une ligne est courbe lorsque nous la voyons s'écarter de la direction d'une droite qui la touche, l'idée de la courbure par rapport aux surfaces, nous est également suggérée par l'observation de la distance qui sépare le plan tangent des points de la surface voisins du point de tangence. . . .
>
> La question des courbures moyennes peut être énoncée en ces termes: *Trouver l'expression de la distance moyenne entre le plan tangent et les points de la surface qui environnent le point de tangence.* [Germain 1831, 16–17]

Pour répondre à cette question, Sophie Germain considère l'ensemble des sections normales en un point M donné. Soient alors les extrémités des arcs—unité comptés sur toutes ces courbes à partir de M. Ces extrémités déterminent sur la surface une *directrice* qui est une courbe gauche.

La *surface des distances* est alors définie comme la surface formée par toutes les lignes de distances tracées à partir des points de la directrice. C'est une portion de surface cylindrique puisque toutes les lignes de distance sont perpendiculaires au plan tangent de la surface en M.

Elle écrit:

> En nous laissant conduire ici par l'analogie, nous dirons que, dans le point donné, la courbure de la surface est proportionnelle à la surface des distances décrite autour de ce point.

Mais la "courbure d'une surface" n'a pas été définie: admettre par *analogie* que c'est un nombre, qui serait proportionnel à l'aire de la "surface des distances" revient à admettre, nous le vérifierons avec l'interprétation dynamique de cette surface, la fameuse hypothèse de Sophie Germain sur la proportionnalité des forces élastiques à la somme des courbures principales.

Enfin Sophie Germain introduit la *surface des distances moyennes* de la surface en un point. C'est la "surface des distances" de la sphère moyenne en ce point. Puisque la directrice tracée sur la sphère moyenne est forcément un cercle de cette sphère, situé dans un plan parallèle au plan tangent à la surface en M, la "surface des distances moyennes" est une portion de cylindre comprise entre le plan tangent à la surface et la sphère moyenne.

Pour une surface donnée, en un point, Sophie Germain démontre que la *"surface des distances"* et la *"surface des distances moyennes"* ont des aires égales. En effet ce sont toutes deux des surfaces développables (l'une est un cylindre, l'autre est une surface cylindrique) qu'elle peut comparer élément par élément, par des comparaisons d'aires planes polygonales, une fois qu'elles ont été appliquées sur le plan.

Le résultat auquel aboutit tout son mémoire est le suivant:

> Si pour deux surfaces différentes, de figures différentes, les sommes des courbures principales sont égales, alors les "surfaces des distances moyennes" respectives seront identiques et les "surfaces des distances" auront même aire.

La démonstration en est immédiate: si pour deux surfaces distinctes, les sommes des courbures principales sont égales, ces deux surfaces auront même courbure moyenne, et donc même sphère moyenne. Par suite les deux surfaces auront même "surface des distances moyennes" et celle-ci aura même aire (par la proposition précédente) que chacune des "surfaces de distances" respectives des deux surfaces initiales considérées.

Ainsi Sophie Germain pense avoir mis en évidence deux *invariants* (locaux) pour des surfaces qui ont même somme de courbures principales, en un point:

—la sphère moyenne,
—l'aire de la surface des distances,

qui lui semblent convenir parfaitement, quand on cherche à se représenter *l'action des forces dûes à la courbure.*

En effet revenons au point de vue mécanique qui gouverne l'introduction de ces diverses surfaces et de toute la construction conceptuelle.

Elle écrit:

> . . . les surfaces des distances sont terminées, d'une part au plan tangent et de l'autre à la surface donnée, sur laquelle elles s'appuient dans tous les points de leurs directrices. Si on conçoit que ces surfaces, devenues solides, continuent à être interposées entre la surface donnée et son plan tangent, elles pourront être regardées comme *l'obstacle* qui empêche les points des directrices, c'est-à-dire, les points qui environnent celui de tangence, de s'approcher de ce plan. Les différents points dont se composent les surfaces des distances, ainsi interposées, étant doués de forces égales, *l'étendue de ces surfaces représentera fidèlement les forces* dues à la distance entre les directrices et le plan tangent, c'est-à-dire, qu'elle représentera l'action des forces nées de la courbure de la surface donnée. [Germain 1831, 23].

En quelque sorte, la surface des distances *matérialise* l'action des forces nées de la courbure et donne une représentation physique de ce qu'elle appelle la loi de répartition de la courbure.

Et parce que la "surface des distances moyennes" a même aire que la "surface des distances" qui, elle, dépend de la forme de la surface donnée, Sophie Germain affirme que du point de vue de l'action des forces tout se passe comme si la figure était sphérique.

Elle peut conclure qu'

> embrassant l'ensemble des forces, on trouve que la courbure uniforme de la sphère de courbure moyenne équivaut à toute autre disposition dans laquelle la condition de l'uniformité ne serait plus observée.

7. COURBURE MOYENNE . . . COURBURE GAUSSIENNE

Ayant constaté que la comparaison de la courbure d'une surface avec celle de la sphère de moyenne courbure (par le biais notamment de leurs "surfaces de distances" respectives), fournit une "idée complète de la manière dont la courbure est distribuée autour d'un point donné," Sophie Germain rapproche sa tentative de celle de Gauss, dont le mémoire "Recherches Générales sur les Surfaces Courbes" paru en 1828, est passé fort brièvement entre ses mains.

Elle écrit à la fin de son mémoire de 1831:

> Je m'étonnais qu'on n'eût pas encore cherché à tirer parti de la comparaison entre la courbure uniforme de la sphère et celle qui présente toute autre figure de la surface, lorsque j' ai eu connaissance d'un mémoire publié fort récemment par *M.* Gauss, dans lequel, embrassant cette comparaison sous un point de vue purement géométrique, l'illustre auteur compare les courbures tracées sur les superficies courbes à celles qui seraient menées sur la surface de la sphère. Je n'ai pu faire qu'une lecture rapide de ce travail. Je le regrette d'autant plus que, malgrè l'extrême différence entre l'idée première de *M.* Gauss et celle qui a amené les recherches qu'on vient de lire, il m'a paru que des résultats semblables à ceux que j'ai obtenu pouvaient, dans certains cas, être tirés des formules de l'auteur, et qu'assurément un pareil accord, si j'étais à même d'en établir la réalité, serait une puissante recommandation en faveur de mes propres recherches. [10]

Il est regrettable que, toujours marginalisée dans la communauté scientifique, Sophie Germain n'ait pas eu le loisir d'étudier longuement le mémoire de Gauss et d'apercevoir la profondeur et l'étendue de sa théorie, dont elle aurait pu alors tirer profit pour son propre projet.

En effet comme nous allons le préciser, il faut bien le reconnaître: les rôles de représentation de la sphère moyenne dans l'essai de Sophie Germain, et de la sphère-unité dans la théorie gaussienne, ont peu de choses à voir.

De plus courbure moyenne et courbure gaussienne sont certes deux fonctions trés simples des courbures principales: l'une en est la somme, l'autre le produit. Mais est-ce seul un malheureux hasard pour notre auteur si c'est le produit qui s'est avéré une notion si féconde dans tout le domaine de la géométrie et de la physique?

Nous l'avons montré: pour Sophie Germain c'est la conviction, acquise dès les années 1810, que la somme des courbures principales caractérise complètement une surface, au moins dans le domaine de la théorie élastique, qui la conduit une vingtaine d'années plus tard à la notion de sphère moyenne. D'ailleurs cette conviction s'explique fort bien et était très plausible, eu égard au résultat d'Euler que nous avons rappelé.

La sphère moyenne n'est alors qu'une concrétisation immédiate de la demi-somme des courbures principales. Sophie Germain ne s'intéresse pas vraiment à "l'image" d'une portion de la surface sur la sphère moyenne par une application quelconque.

Rappelons, par contre, les principaux éléments de la démarche, purement géométrique, du mémoire de Gauss [1827].

Gauss utilise la représentation sphérique d'une surface, qui lui vient de l'astronomie: à tout point M de la surface, pour lequel le vecteur normal à la surface en M a comme cosinus directeurs X_1, Y_1, Z_1, Gauss associe le point m dont les coordonnées sont X_1, Y_1, Z_1; point qui appartient donc à la sphère-unité ($X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2 = 1$).

Gauss approche la notion de courbure d'une surface en un point, à partir du quotient de l'aire de l'élément de surface autour de ce point, à l'aire de son image sur cette surface sphérique-unité auxiliaire. En fait il définit la courbure, dite depuis *gaussienne*, comme étant égale à la limite de l'inverse de ce quotient.

Le calcul analytique prouve *ensuite* que cette courbure gaussienne se trouve être égale au produit des deux courbures principales et qu'elle caractérise la géométrie intrinsèque de la surface.

En effet Gauss a écrit l'élément linéaire de la surface (le "ds" de la surface), sous la forme:

$$ds^2 = E(p, q)dp^2 + 2F(p, q)dpdq + G(p, q)dq^2$$

où p et q sont les coordonnées gaussiennes (qui sont des coordonnées paramétrisant la surface). Alors, la courbure gaussienne s'exprime uniquement en fonction des coefficients E, F, G, de l'élément linéaire et de leurs premières et secondes dérivées (par rapport à p et q).

Enfin la courbure gaussienne est invariante par les isométries de l'élément linéaire, c'est-à-dire les transformations de la surface par courbure, sans flexion ou pli, ni élongation. C'est le fameux "théorème egregium" de Gauss: en cela, la courbure gaussienne caractérise bien la surface, indépendamment de l'espace euclidien dans lequel elle est plongée [11].

Ensuite Gauss étudie les géodésiques d'une surface (étude qui s'avérera capitale) et donne leur détermination analytique. Il forme la somme des angles d'un triangle géodésique, ce qui lui permet d'énoncer le résultat fondamental suivant: la somme des angles d'un triangle formé par des lignes géodésiques sur une surface quelconque est:

—supérieure à Π, si cette surface est concavo-concave,
—inférieure à Π, si elle concavo-convexe,

d'une quantité qui a pour mesure l'aire du triangle sphérique qui lui correspond dans la représentation sur la sphère-unité (en comptant la surface totale de cette dernière pour 4Π).

Pour démontrer ce théorème, Gauss exhibe deux systèmes de courbes, se coupant orthogonalement sur la surface et dont l'un est formé de géodésiques, systèmes qui constitueront des coordonnées locales sur la surface et seront très utiles pour décrire le mouvement d'une point d'une surface vibrante.

Gauss décrit lui-même la rupture épistémologique dont il est l'artisan:

> envisager une surface non comme la limite d'un solide, mais bien comme un solide flexible, et inextensible, dont une dimension est censée s'évanouir . . . et par suite s'intéresser aux propriétés absolues et invariables de cette surface quelle que soit sa forme.

Ceci conduit à étudier une surface, non dans ses rapports à l'espace environnant, mais d'un point de vue *intrinsèque*, en se plaçant sur la surface elle-même. C'est en maîtrisant ce point de vue que les élasticiens de la deuxième moitié du XIXème siècle feront des progrès importants dans la théorie des surfaces élastiques de formes initiales variées.

Or les notions de sphère moyenne et surtout de surface des distances, trop directement concrètes et liées à la représentation mécanique, s'opposent à ce point de vue tandis que manque à Sophie Germain la détermination analytique de nombreux éléments relatifs à une surface.

Le détour par une théorie mathématique autonome, puissante et profonde, s'est donc révélé indispensable dans le domaine difficile des surfaces élastiques, défriché par Sophie Germain. Elle n'eût pas le temps ni les moyens de se convaincre de cette nécessité.

NOTES

1. Sur ces deux aspects, on consultera surtout [Truesdell 1960, 1968].

2. Sur l'histoire de la géométrie différentielle, voir [Reich 1973; Struik 1933], mais les travaux de Sophie Germain n'y sont que très brièvement évoqués.

3. Sur le théorème de Meusnier, voir aussi [Darboux 1887, 268–271; Reich 1973, 286].

4. Ces mémoires manuscrits de Sophie Germain se trouvent aux Archives de l'Académie des Sciences, classés au dossier du Grand Prix pour l'année 1813. L'étude la plus complète de l'oeuvre de Sophie Germain, notamment de ces 3 essais, et de ses relations avec ses contemporains, se trouve dans Bucciarelli et Dworski [1980]. Todhunter et Pearson [1886] ont rendu compte de [Germain 1821]. Enfin C. Truesdell annonce dans [Truesdell 1983] une étude à paraître.

5. De plus Sophie Germain ne fait intervenir qu'une seul coefficient dans sa théorie; or la question du nombre de paramètres caractérisant un corps élastique a été une source de difficultés et de divisions. D'autre part on déduit de son analyse que la puissance à laquelle intervient l'épaisseur de la membrane (supposée *mince*) dans l'expression du moment élastique, est égale à 4. Navier [1820], lui, trouvera la valeur 3, alors qu'Euler avait la valeur 2. voir [Bucciarelli & Dworski 1980, 139–140]. L'analyse complète de tous ces aspects sortirait du cadre de cet article et est faite par Bucciarelli et Dworski.

6. La note manuscrite de Lagrange [1812/1829] a été publiée au cours de la controverse de Navier avec Poisson. Celui-ci, de parfaite mauvaise foi sur ce sujet, avait commencé par en nier l'existence.

7. La plus grande partie de la correspondance se trouve à la Bibliothèque Nationale, Ms. 9114, 9118. . . . De nombreuses lettres sont publiées en anglais dans Bucciarelli et Dworski [1980]; voir aussi [Germain 1879]: les lettres les plus significatives y figurent.

8. Pour une étude globale de la critique par Poisson des méthodes lagrangiennes, voir [Arnold 1983/1984; Dahan-Dalmédico 1985, 51–55].

9. A propos de la place de ce postulat de proportionnalité de l'effet à la cause, voir [Dahan-Dalmédico 1987; Bucciarelli & Dworski 1980, 80–81].

10. On peut également consulter une Lettre de Sophie Germain à Gauss, datée du 28 Mars 1829, qui se trouve à la bibliothèque de l'université de Göttingen et publiée en anglais dans Bucciarelli et Dworski [1980].

Sophie Germain résume à Gauss les grandes lignes de son mémoire, alors en préparation, et lui avoue l'étonnement et la satisfaction qu'elle a éprouvés en apprenant qu'

> un mathématicien si réputé, a et presque simultanément l'idée de l'analogie (pour définir la courbure d'une surface à l'aide de celle d'une sphère) qui me semble si rationnelle que je ne comprends pas que personne ne l'ait eu plus tôt.

11. En 1815 O. Rodrigues, alors jeune étudiant de Poisson, publia deux courtes notes [1815a, 1815b] dans lesquelles il avait introduit la sphère auxiliaire d'une surface et montré que la valeur de l'intégrale, étendue à la surface, de $1/(\rho\rho')$ (la courbure intégrale gaussienne) est égale à la projection normale de la surface sur cette sphère. Rodrigues préfigure, dans un ordre différent, les résultats de [Gauss 1827]. Mais Rodrigues ne rend pas compte des changements de signe de la courbure gaussienne pour les surfaces concavo–convexes et attribue par exemple au tore une courbure totale égale à 8π; il manque ainsi le "théorème égrégium". Voir [Truesdell 1983; Reich 1973]. Sophie Germain, si elle mentionne Rodrigues, ne l'a visiblement pas lu.

12. En particulier pour de "petites" vibrations, Kirchhoff [1850] considère la surface médiane de la surface élastique comme inextensible et lui applique alors le résultat de Gauss sur l'invariance de la courbure qui se traduit par

$$(1/R_1 + \delta(1/R_1))(1/R_2 + \delta(1/R_2)) = 1/R_1R_2$$

ce qui, développé au premier ordre des variations, donne:

$$1/R_2 \cdot \delta(1/R_1) + 1/R_1 \cdot \delta(1/R_2) = 0.$$

Cette relation conduit à l'équation différentielle déterminant le mouvement d'un point de la surface vibrante. Voir [Love 1927/1944, 499 et suivantes].

REFERENCES

Arnold, D. H. 1983/1984. The mécanique physique of Siméon Denis Poisson: The evolution and isolation in France of his approach to physical theory (1800–1840). *Archive for History of Exact Sciences* **28,** 243–367; et **29,** 37–94, 287–307.

Bernoulli, J. 1705. Véritable hypothèse de la résistance des solides, avec la démonstration de la courbure des corps qui font ressort (Lettre du 12 Mars 1705). In *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris 1705* 4ème éd., pp. 176–186. Dans *Opera,* Vol. 2, pp. 976–989. Genève: Haeredes Cramer et Fratres Philibert, 1754. Reproduit, Bruxelles: Culture et Civilisation, 1967.

Bucciarelli, L. L., & Dworski, N. 1980. *Sophie Germain. An essay in the history of the theory on elasticity.* Dordrecht: Reidel.

Dahan-Dalmédico, A. 1985. La mathématisation des théories de l'elasticité par A-L. Cauchy et les débats dans la physique mathématique française (1800–1840). *Sciences et Techniques en Perspective* **9,** 1–100.

——— 1987. *Etude des méthodes et des "styles" de mathématisation: la science de l'elasticité* (à paraître).

Darboux, G. 1887–1896. Cours de géométrie de la faculté des sciences, *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 4 volumes. Paris: Gauthier–Villars.

Euler, 1744. *Methodus inveniendi lineas curvas* etc. Lausanne et Genève: Marcus-Michaelis Bousquet & Soc. Dans *Opera omnia,* C. Carathéodory, Éd., 1ère série, Vol. 24, Bern: Orell Füssli, 1952; Une traduction anglaise de l'Addition sur les courbes élastiques se trouve dans Leonhard Euler's elastic curves, translated and annotated by W. A. Oldfather, C. A. Ellis, and D. M. Brown. *Isis* **20** (1933), 72–160.

——— 1760. Recherches sur la courbure des surfaces. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin* 119–143. Dans *Opera omnia,* A. Speiser, Éd., 1ère série, Vol. 28, pp. 1–22. Lausanne: Orell Füssli, 1955.

——— 1779. Investigatio motuum quibus laminae et virgae elasticae contremiscunt. *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* (1782), 103–161. Dans *Opera omnia,* F. Stüssi et E. Trost, Éds., 2ème série, Vol. 11, pp. 223–268. Lausanne: Orell Füssli, 1957.

Gauss, C. F. 1827. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Commentarii Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores* **6,** 1823/27, 99–146. Dans *Werke,* Königliche Gesellschaft der Wissenschaften, Éd., Vol. 4, pp. 217–258. Göttingen, 1880. Edition Française, Trad. E. Roger: *Recherches générales sur les surfaces courbes*. Paris Librairie A. Blanchard, 1967.

Germain, S. 1821. *Recherches sur la théorie des surfaces elastiques*. Paris: Veuve Courcier.

——— 1826. *Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques et equations générales de ces surfaces*. Paris: Imprimerie Hazard Courcier.

——— 1828. Examen des principes qui peuvent conduire à la connaissance des lois de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques. *Annales de Chimie et de Physique* **38**, 123–131.

——— 1831. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **7**, 1–29.

——— 1879. *Oeuvres philosophiques de Sophie Germain, suivies de pensées et de lettres inédites, et précédées d'une notice sur sa vie et ses oeuvres*, par H. Stupuy. Paris: Paul Ritti Libraire.

Kirchhoff, G. 1850. Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *Journal für die reine und augewaudte Mathematik* **40**, 50–88.

Lagrange, J. L. 1812/1829. Note (manuscrite) à propos du mémoire de Sophie Germain pour le prix de l'Académie (Décembre 1811), publiée par C. F. Navier. *Annales de Chimie et de Physique* **39**, 149.

Love, A. E. 1927. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 2ème ed. New York: Dover, 1944.

Meusnier, J. B. 1785. "Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires Divers Savants* **10**, 477–510.

Navier, C. L. M. H. 1820. *Mémoire sur la flexion des plans élastiques*. Bibliothèque de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

Poisson, S. D. 1814a. Extrait de mon mémoire sur les surfaces élastiques. *Bulletin des Sciences de la Société Philomatique* **1**, 47–52.

——— 1814b/1816. Mémoire sur les surfaces élastiques. Dans *Mémoires de l'Institut 1812*, l'ère classe, Vol. 9, pp. 167–226 (Ce volume n'a pas paru avant 1816).

——— 1816. Extrait d'un mémoire sur les surfaces élastiques. *Correspondance de l'Ecole Polytechnique* **3**, 154.

Reich, K. 1973. Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828–1868). *Archive for History of Exact Sciences* **11**, 273–382.

Rodrigues, O. 1815a. Sur quelques propriétés des intégrales doubles et des rayons de courbure des surfaces. *Bulletin des Sciences de la Société Philomatique* **2**, 34–36.

——— 1815b. Recherches sur la théorie des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles qui ont un rappot direct avec les formules de cette théorie. *Correspondance de l'Ecole Polytechnique* **3**, 162–183.

Spivak, M. 1975. *A comprehensive introduction to differential geometry*. Cambridge: University Press.

Struik, D. J. 1933. Outline of a history of differential geometry. *Isis* **19**, 92–120; **20**, 161–191.

Taton, R. 1951. *L'Oeuvre scientifique de Monge*. Paris: Presses Universitaires de France.

Todhunter, I., & Pearson, K. 1886/1893. *A history of the theory of elasticity*, 2 tomes. Cambridge: University Press.

Torretti, R. 1978: *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*. Dordrecht: Reidel.

Truesdell, C. 1960. *The rational mechanics of flexible or elastic bodies, 1638–1788*. Introduction to L. Euleri *Opera omnia*, Vols. X et XI, seriei secundae. L. Euleri *Opera omnia*, 2ème série, Vol. 11, 2ème section. Zürich: Orell Füssli.

——— 1968. *Essays in the history of mechanics*. New York: Springer.

——— 1983. The influence of elasticity on analysis: The classic heritage. *Bulletin of the American Mathematical Society* **9**, 293–310.